ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ
СОЮЗА ССР

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТОВ СТАНДАРТИЗАЦИИ. ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ДЛЯ ФОРМАЛИЗАЦИИ ЦЕЛЕЙ И ОГРАНИЧЕНИЙ

ГОСТ 18.002—80

Издание официальное

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР ПО СТАНДАРТАМ
Москва

РАЗРАБОТАН Государственным комитетом СССР по стандартам

ИСПОЛНИТЕЛИ

Д. М. Комаров, д-р техн. наук, проф.; **Е. В. Извеков**, канд. техн. наук; **В. А. Певзнер**, канд. техн. наук; **Н. Д. Алексеева**; **Ю. С. Вениаминов**; **С. А. Клявина**; **Г. В. Литманс**; **А. В. Матвеев**; **М. Л. Сыроватко**; **Г. С. Табакова**; **Н. И. Горшкова**; **О. Ф. Пославский**

ВНЕСЕН Государственным комитетом СССР по стандартам

Член Госстандарта **Б. Н. Лямин**

УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 19 декабря 1980 г. № 5159

УДК 658.562.014:006.354 Группа Т51

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ СОЮЗА ССР

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТОВ СТАНДАРТИЗАЦИИ. ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ДЛЯ ФОРМАЛИЗАЦИИ ЦЕЛЕЙ И ОГРАНИЧЕНИЙ

Quantitative methods of optimization for parameters of standardization objects. Fields of application of technical parameters to formalize aims and limitations.

ГОСТ 18.002—80

Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 19 декабря 1980 г. № 5159 срок введения установлен

с 01.01.1982 г.

Настоящий стандарт распространяется на количественные методы оптимизации параметров объектов стандартизации и устанавливает общие положения по областям применимости технических величин для формализации целей и ограничений и по связанным с применением этих величин особенностям постановки задач оптимизации.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Величины, применяемые при оптимизации параметров объектов стандартизации для формализации целей, ограничений и используемых при этом зависимостей эффектов и затрат от оптимизируемых параметров, следует разделять на три вида:

технические (длина, масса, время, мощность, металлоемкость, энергонасыщенность и др.);

денежные (стоимость, цена и др.);

условные (эстетические, психологические, социальные и др.).

1.2. Методы оптимизации параметров объектов стандартизации в зависимости от совокупности используемых в них величин следует разделить на три вида, а именно, на методы, использующие:

технические величины;

денежные величины, допускается применение технических величин;

условные величины, допускается применение денежных и (или) технических величин.

Издание официальное

1.3. При выборе вида величин, используемых при оптимизации, следует учитывать влияние этого выбора на качество результатов оптимизации (точность, полноту, детализацию, надежность и своевременность), технологичность методов оптимизации (необходимую квалификацию специалистов, использующих метод; трудоемкость; возможность автоматизации работ; необходимость в специальных технических средствах), технологичность процесса разработки метода оптимизации (необходимую квалификацию специалистов, разрабатывающих метод, включая как теоретическую подготовку, так и наличие опыта в разработке и использовании объекта стандартизации; трудоемкость; возможность унификации и автоматизации) и даже на возможность осуществления количественной оптимизации.

1.4. При выборе величин, используемых в методе оптимизации, необходимо учитывать:

особенности оптимизируемого объекта;

условия оптимизации и разработки объекта стандартизации, в частности, степень теоретической изученности оптимизируемого объекта, наличие опыта по созданию и использованию оптимизируемого или близкого к нему объекта, а также стадию создания и использования объекта и функцию управления, для которой производится оптимизация, наличие средств и разработанных методов для оптимизации;

условия использования объекта стандартизации;

роль эстетических, социальных и других трудно измеряемых явлений в решаемой задаче.

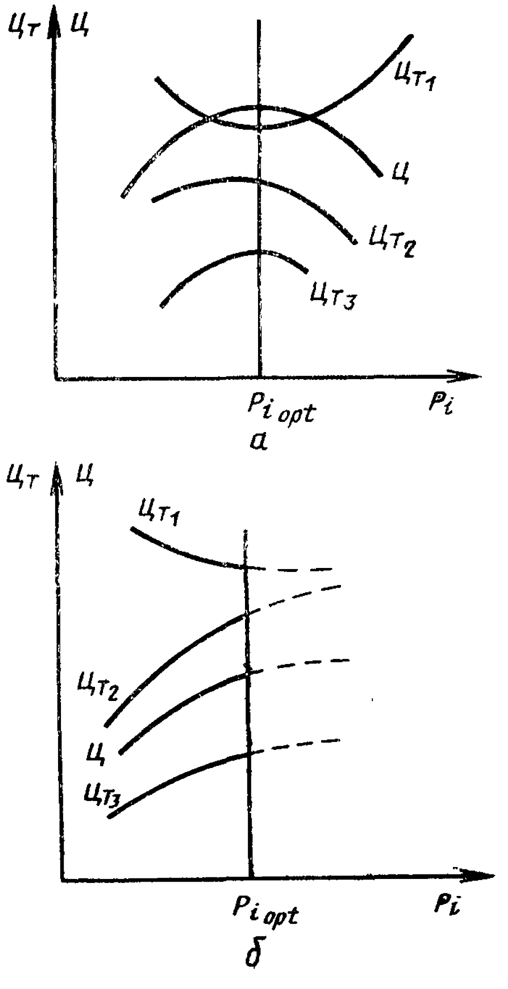
1.5. Для расширения использования натуральных показателей и нормативов в управлении народным хозяйством технические величины должны использоваться при установлении оптимальных нормативов и при определении оптимальных параметров объектов стандартизации на основе уже установленных нормативов.

2. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТОЛЬКО ТЕХНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

2.1. Замена целевой функции и ограничений, непосредственно отражающих экономические и социальные эффекты и затраты, на целевую функцию и ограничения, формализованные в технических величинах, допускается только тогда, когда искомые оптимальные значения параметров объекта в том и в другом случае совпадают (чертеж и справочное приложение 1).

Формализацию целей и ограничений в технических величинах при оптимизации параметров объектов стандартизации следует использовать как средство достижения максимальной экономической и социальной эффективности в тех случаях, когда трудно или невозможно составить достаточно точные математические зависи-

Условие достижения социально-экономического оптимума при использовании целевой функции в технических величинах



а—случай внутреннего оптимума; *б*—случай граничного оптимума; *Ц*—целевая функция, непосредственно отражающая экономические и социальные эффекты и затраты; $Ц_т=F(Ц)$—целевая функция, использующая только технические величины; P_i—оптимизируемый параметр

мости для них и (или) получить достаточно достоверные входные данные при использовании нетехнических величин.

2.2. Переход от социальных и экономических целевых функций и ограничений к целевым функциям и ограничениям, формализованным в технических величинах, допускается осуществлять как на начальном этапе постановки задачи, так и на этапе оценки применимости и коррекции выбранной математической модели оптимизации. При переходе к использованию только технических величин на начальном этапе постановки задачи следует явно учитывать общие закономерности научно-технического, экономического и социального развития путем двухэтапной постановки задачи оптимизации или неявно при специальных постановках задачи оптимизации. Переход к использованию только технических величин на этапе оценки применимости и коррекции выбранной математической модели оптимизации следует обосновать путем анализа влияния выбора вида используемых величин на эффективность оптимизации. При этом сравниваются достоинства и недостатки использования технических величин в решаемой задаче.

2.3. При явном учете общих закономерностей научно-технического, экономического и социального развития переход к целевой функции и ограничениям в технических величинах следует осуществлять в два этапа.

На первом этапе необходимо на основе анализа общих закономерностей научно-технического, социального и экономического развития составить математическую модель оптимизации с использованием денежных и (или) условных величин, решением которой являются оптимальные пороговые значения технических величин (запас прочности, запас устойчивости, предельная деформация и т. д.) и (или) оптимальные функциональные зависимости между техническими величинами.

Этот результат следует использовать на втором этапе при формировании целевой функции и ограничений, применяемых для оптимизации параметров объектов стандартизации, как нормативы, расчет по которым приводит к определению оптимальных параметров объектов стандартизации (справочное приложение 2).

Такой подход следует использовать, когда результаты, полученные на первом этапе, имеют перспективу многократного использования.

2.4. Специальные постановки задач оптимизации с использованием только технических величин заключаются в определении оптимальных значений параметров объектов стандартизации на основе норм и правил, формализованных в технических величинах. При этом соответствие используемых норм и правил социально-экономическому оптимуму устанавливается практикой их применения и обеспечивается их своевременным обновлением.

При специальной постановке задачи оптимизации допустимо:

выбрать в качестве целевой функции главный технический эффект (затраты) или характерный технический показатель (масса, коэффициент полезного действия, время выполнения определенной функции), (справочные приложения 3, 4);

использовать в качестве норм предельные технические величины (запас прочности, запас устойчивости, допускаемое удельное сопротивление и т. д.), установленные на основе опыта создания и эксплуатации объекта (справочное приложение 5);

сводить вычислительную процедуру к прямому расчету по указанным нормам.

2.4.1. В случае оптимизации мероприятий (конструкторских, технологических), изменяющих лишь один технический показатель качества объекта, например, производительность, когда остальные его показатели не изменяются, этот показатель следует принять в качестве целевой функции оптимизации.

2.4.2. В ряде случаев оптимальные параметры следует определять, исходя из требования равной прочности разных сечений деталей или элементов конструкций, равного срока службы деталей оптимизируемого объекта (для упрощения ремонта) и т. п.

2.4.3. Если стоимость элемента оптимизируемого объекта не существенна в общей стоимости объекта, но его качество оказывает решающее влияние на эффективность всего объекта, то допускается оптимизация параметров такого элемента, исходя только из технических требований, например, чтобы его погрешность не оказала существенного влияния на погрешность всего объекта.

2.4.4. В качестве целевой функции следует принимать время (время разработки объекта, время выполнения оптимизируемым объектом определенной функции и т. д.) в следующих случаях:

от срока разработки элемента объекта, стоимость которого существенно меньше стоимости всего объекта, существенно зависит срок разработки всего объекта (параметры этого элемента должны оптимизироваться, исходя из минимизации срока его разработки);

при производстве продукции, для которой стоимость материалов не играет существенной роли, а суммарные затраты складываются из приведенных затрат на капитальные вложения, затрат живого труда и энергии, являющихся возрастающими функциями интервала времени изготовления данного объема продукции, в качестве целевой функции следует взять время изготовления единицы объема продукции;

быстродействие оптимизируемого объекта (ЭВМ, аппаратуры, прибора) оказывает решающее влияние на эффективность его функционирования (целевой функцией должен быть показатель быстродействия).

2.5. При обосновании перехода к использованию только технических величин на этапе оценки применимости и коррекции выбранной математической модели оптимизации необходимо учитывать достоинства и недостатки методов оптимизации, использующих технические величины.

2.5.1. К достоинствам методов оптимизации, использующих только технические величины, по сравнению с методами оптимизации, в которых используются также величины других видов, следует относить:

более высокую точность измерения исходных величин, в частности, ввиду наличия совершенных средств измерения и метрологических служб;

возможность широкого использования установленных законов природы, большого числа эмпирических зависимостей и нормативных данных, накопленных в процессе разработки и использования объектов стандартизации;

лучшее согласование отдельных параметров оптимизируемого объекта, например, обеспечение одинакового запаса прочности элементов (сочетаний) объекта, согласование требований к точности и (или) надежности отдельных элементов комплекса при использовании некоторых методов оптимизации;

простоту способов сочетания теоретических методов оптимизации с экспериментальными;

более простую и точную формализацию исходных зависимостей для описания ограничений на расход дефицитных материалов, сырья и комплектующих элементов, ограничений по техническим возможностям, а также технических целей типа достижения некоторой точности, мощности, производительности, чистоты материала, требований по охране природы и др.

2.5.2. К недостаткам следует относить:

сложность или отсутствие возможности формализовать при использовании только технических величин следующие операции:

сравнение существенно отличных между собой альтернативных решений;

учет ряда социальных, эстетических, психологических и других явлений;

учет изменения полезности в зависимости от изменения объема (количества) объектов;

учет влияния риска, связанного с неопределенностями;

приведение эффектов и затрат к одному моменту времени, а также необходимость глубокого изучения функционирования оптимизируемого объекта.

3. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ В КОЛИЧЕСТВЕННЫХ МЕТОДАХ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕХНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В СОЧЕТАНИИ С ДЕНЕЖНЫМИ И УСЛОВНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

3.1. В тех случаях, когда надо сопоставить варианты, которые нельзя сравнить, используя только технические величины, следует производить оптимизацию, используя также денежные и (или) условные величины. Способы сочетания технических величин с этими величинами следует выбирать с учетом особенностей решаемой задачи.

3.2. При формализации целевой функции и ограничений допускается использовать следующие сочетания видов величин:

различные ограничения и целевая функция формализуются в разных видах величин, например, целевой функцией служат приведенные суммарные затраты, а ограничения наложены на срок выполнения программы, на величины некоторых технических параметров и т. д.;

используются функции величин разного вида, например, целевой функцией является отношение эффекта, который является технической величиной, к затратам, которые являются денежной величиной.

3.3. При выборе сочетания видов величин необходимо учесть, что особое значение имеет использование технических величин в сочетании с величинами других видов при формировании целевой функции и ограничений в условиях необходимости экономии трудовых затрат, некоторых материалов и видов энергии и других составляющих эффектов и затрат.

3.3.1. При существенном влиянии дефицита некоторой из составляющей затрат (трудовых ресурсов, материала, комплектующего элемента, энергии и др.), учитываемого с помощью технической величины, следует использовать одну из следующих постановок задачи оптимизации:

минимизировать дефицитную составляющую затрат при ограничениях на другие составляющие затрат и на эффект;

максимизировать эффект при ограничении на дефицитную составляющую затрат;

минимизировать отношение дефицитной составляющей затрат к эффекту при соответствующих ограничениях.

3.3.2. При существенном дефиците в некоторой составляющей эффекта (получаемой от оптимизируемого объекта энергии, материала и т. д.), учитываемого с помощью технической величины, следует использовать одну из следующих постановок задачи оптимизации:

максимизировать дефицитную составляющую эффекта при ограничениях на другие составляющие эффекта и на затраты;

минимизировать затраты с учетом ограничений на дефицитную составляющую эффекта;

максимизировать отношение дефицитной составляющей эффекта к затратам при соответствующих ограничениях.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
Справочное

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ РЕГЛАМЕНТАЦИИ ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТОВ СТАНДАРТИЗАЦИИ

Для оптимизации параметров объектов стандартизации необходимо измерять величины, характеризующие разнообразные технические (физико-химические), экономические и социальные явления, факторы и параметры. Соответственно при оптимизации используются технические, экономические и социальные науки.

В технических науках, как правило, применяются строгие методы измерения с использованием технических величин (длины, силы, времени и т. п.). Точность измерения значений этих величин обеспечивается средствами и методами метрологической службы. В экономических науках применяются денежные величины (стоимость, цена, себестоимость и др.) и некоторые натуральные показатели (технические величины). Так как денежные величины служат для учета более сложных явлений чем технические величины и вследствие того, что при установлении цен и заработной платы необходимо учитывать ряд противоречивых обстоятельств, точность определения значений денежных величин, необходимых для оптимизации параметров объектов стандартизации, как правило, ниже точности определения технических величин. В социальных науках и психологии, а иногда в экономике и других науках при рассмотрении явлений, трудно измеряемых в технических и денежных величинах, применяются величины, определяемые на основе анализа суждений специалистов и поведения людей. Такие величины называются условными. Они определяются в баллах, значениях шкал полезности и субъективной вероятностью [1]. Точность определения значений этих величин еще ниже, чем точность определения значений денежных величин.

Разделение видов величин на технические, денежные и условные и соответствующая классификация методов оптимизации (пп. 1.1; 1.2 стандарта [1, 2]) имеют фундаментальное значение для теории и практики управления качеством и стандартизацией.

Выбор вида величин оказывает решающее влияние на качество результатов оптимизации и технологичность методов оптимизации (п. 1.3 стандарта). Поэтому от правильности выбора величин, используемых при оптимизации, решающим образом зависит эффективность оптимизации и возможность ее массового применения в отраслях народного хозяйства.

Распространено мнение, что оптимизацию параметров объектов стандартизации предпочтительно осуществлять по целевой функции, выраженной в денежных величинах. Однако в действительности практикой разработки объектов стандартизации отработаны эффективные методы определения оптимальных значений их параметров по целевым функциям или нормативам, выраженным в технических величинах. При использовании этих методов технические величины при оптимизации служат для повышения точности оптимизации, в частности, для более полного достижения экономической и социальной эффективности и (или) для упрощения составления математической модели, получения входных данных, вычислительных процедур и расширения возможностей экспериментальной оптимизации.

Учет этого является необходимым условием широкого применения совершенных методов оптимизации в народном хозяйстве. Без использования этих методов часто практически невозможна качественная разработка продукции.

Появление этих методов и их широкое применение объясняется достоинствами использования технических величин (п. 2.5.1 стандарта). Но и техническим величинам свойственны недостатки (п. 2.5.2 стандарта).

В принципе, область применимости технических величин определяется п. 2.1 стандарта. Однако положение этого пункта трудно непосредственно использовать для практической работы. Поэтому это положение в стандарте (как и на практике) конкретизируется путем регламентации решения двух задач: применением двухуровневой математической модели (п. 2.3 стандарта) и применением ряда других приемов, указанных в п. 2.4 стандарта.

Допускается также обоснованный выбор вида величин непосредственным сравнением их влияния на эффективность оптимизации (п. 2.5). Для такого сравнения в важных и спорных случаях рекомендуется применять методы определения применимости математических моделей оптимизации, установленные в РДМУ 119—78 [8].

Применение технических величин там, где это нецелесообразно, как и, наоборот, применение денежных или условных величин в тех областях, в которых целесообразно применять технические величины, приводит к уменьшению эффективности оптимизации. Поэтому необходимо эту область регламентировать обязательным документом. Это является главной задачей настоящего стандарта. Стандарт, кроме того, регламентирует связанные с установлением областей применимости особенности постановок задачи оптимизации.

Оптимизация параметров объекта стандартизации только по техническим величинам и по целевой функции в технических величинах в сочетании с ограничениями в других величинах не исключает использования расчета экономической эффективности всего объекта, выраженной в денежных величинах. Результат такого расчета может быть использован как один из показателей для оценки уже оптимизированного объекта при сравнениях его с другими объектами, близкими по назначению.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
Справочное

ПРИМЕР ДВУХЭТАПНОЙ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТОВ СТАНДАРТИЗАЦИИ

1-й этап. Построение математической модели оптимизации норматива на значение запаса прочности [3, 4].

Запасом прочности называется отношение математического ожидания несущей способности конструкции по прочности (разрушающей нагрузки) F_{R_0} к математическому ожиданию эксплуатационной нагрузки $F_{э_0}$, т. е.

$$n=\frac{F_{R_0}}{F_{э_0}} .$$

Запас прочности назначается с целью учета неточностей расчета на прочность, вызванных отклонениями от расчетных следующих величин:

механических свойств материала;

геометрических размеров;

эксплуатационных нагрузок;

жесткостей закрепления (соединений), т. е. граничных условий.

Вероятность отсутствия разрушений, т. е. вероятность таких сочетаний указанных отклонений, при которых $F_R > F_э$, равна

$$P=P(F_R-F_э>0). \qquad (1)$$

В тех случаях, когда можно F_R и $F_э$ считать распределенными по нормальному закону, получаем

$$P=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sigma(F_R-F_э)2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{F_э-F_R-F_{э_0}+F_{R_0}}{\sigma(F_R-F_э)}\right]d(F_R-F_э)=$$

$$=H\left(\frac{F_{R_0}-F_{э_0}}{\sqrt{\sigma^2_{F_R}+\sigma^2_{F_э}-2r_{F_RF_э}\sigma_{F_R}\sigma_{F_э}}}\right),$$

где F_{R_0} и $F_{э_0}$ — математические ожидания несущей способности и эксплуатационной нагрузки;

σ_{F_R}, $\sigma_{F_э}$, $\sigma_{(F_R-F_э)}$ — средние квадратические отклонения величин F_R, $F_э$, $F_R-F_э$;

$r_{F_RF_э}$ — коэффициент корреляции между F_R и $F_э$,

$$H(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx. \qquad (2$$

Когда коэффициент корреляции $r_{F_RF_э}$ равен нулю, вероятность отсутствия разрушения равна

$$P=H\left(\frac{n-1}{\sqrt{n^2V^2_{F_R}+V^2_{F_э}}}\right), \qquad (3)$$

где $n=\frac{F_{R_0}}{F_{э_0}}$ — условный запас прочности; (4)

$V_{F_R}=\frac{\sigma_{F_R}}{F_{R_0}}$ и $V_{F_э}=\frac{\sigma_{F_э}}{F_{э_0}}$ — коэффициенты вариации.

Приведенную стоимость изготовления и эксплуатации представим в виде

$$C=C_1P+C_2(1-P), \tag{5}$$

где C_1 — приведенная стоимость при отсутствии разрушения;

C_2 — затраты и потери при разрушении.

Стоимость C_1, в свою очередь, зависит от материала (в данном случае от временного сопротивления σ) и вектора геометрических размеров $\overline{x}$, т. е.

$$C_1=C_1(\sigma,\overline{x}). \tag{6}$$

Таким образом, задача оптимизации запаса прочности сводится к анализу следующей математической модели: выбрать такое n, при котором приведенная стоимость по (5) достигает минимума при ограничениях (3), (6), если известны V_{F_R} и $V_{F_э}$. Отметим, что найденному оптимальному запасу прочности соответствует определенная вероятность отсутствия разрушения P, которая определяется по (3).

Конкретизируем полученную модель для частного случая определения оптимальной величины запаса прочности цилиндрического стержня диаметром d, который растягивается силой $F_{э_0}$, имеющей среднее квадратическое отклонение $\sigma_{F_э}$.

Разрушающая нагрузка

$$F_R=\frac{\pi d^2}{4}\sigma_{вр}, \tag{7}$$

где $\sigma_{вр}$ — временное сопротивление материала стержня растяжению имеет математическое ожидание

$$F_{R_0}=\frac{\pi d_0^2}{4}\sigma_{вр_0}, \tag{8}$$

где d_0 и $\sigma_{вр_0}$ — математические ожидания величин d и $\sigma_{вр}$.

Выражение для среднего квадратического отклонения разрушающей нагрузки из (7)

$$\sigma_{F_R}=\sqrt{\left(\frac{\partial F_R}{\partial d}\sigma_d\right)^2+\left(\frac{\partial F_R}{\partial\sigma_{вр}}\sigma_{\sigma_{вр}}\right)^2}=\frac{\pi}{4}\sqrt{(2d^2\sigma_{вр}\sigma_d)^2+(d^2\sigma_{\sigma_{вр}})^2}, \tag{9}$$

где σ_d — среднее квадратическое отклонение диаметра;

$\sigma_{\sigma_{вр}}$ — среднее квадратическое отклонение величины $\sigma_{вр}$.

Приведенную стоимость изготовления и эксплуатации без учета влияния разрушения будем считать пропорциональной весу стержня, т. е. $C_1=kd_0^2$ или, пользуясь выражениями (8) и (4),

$$C_1=\frac{4kF_{R_0}}{\pi\sigma_{вр_0}}=\frac{4kF_{э_0}n}{\pi\sigma_{вр_0}}. \tag{10}$$

Приведенная стоимость изготовления и эксплуатации с учетом возможных разрушений по уравнениям (5), (3) и (10)

$$C=\frac{4kF_{э_0}n}{\pi\sigma_{вр_0}}+C_2\left[1-H\left(\frac{n-1}{\sqrt{n^2V_{F_R}^2+V_{F_э}^2}}\right)\right]. \tag{11}$$

Таким образом, математическая модель оптимизации запаса прочности n сводится к минимизации выражения (11) при ограничениях (8) и (9).

2-й этап. Найдем оптимальный диаметр цилиндрического стержня $d_{\text{опт}}$, который растягивается силой Q, если известно временное сопротивление его материала растяжению $\sigma_{\text{вр}}$ и оптимальный запас прочности n. На этом этапе уже можно считать известной оптимальную величину норматива n.

Следовательно, $\sigma_{\text{опт}}=\dfrac{\sigma_{\text{вр}_0}}{n}$.

Поэтому задача сводится к прямому расчету по формуле:

$$\frac{\pi d_{\text{опт}}^2}{4}\cdot\sigma_{\text{опт}}=Q,$$

откуда

$$d_{\text{опт}}=\sqrt{\frac{4Qn}{\pi\sigma_{\text{вр}_0}}}\ .$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3
Справочное

ПРИМЕРЫ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОСТАНОВОК ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТОЛЬКО ТЕХНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

1. Рассмотрим несколько примеров специальной постановки задач оптимизации с использованием только технических величин.

Модель 1. Найти размеры балки прямоугольного сечения наибольшей жесткости при изгибе, которая может быть получена из цилиндрического бревна радиуса R (черт. 1).

Жесткость балки с прямоугольным сечением равна

$$EI=\frac{bh^3}{12}E,$$

где E — модуль упругости материала балки;

$I=\frac{bh^3}{12}$ — момент инерции поперечного сечения балки;

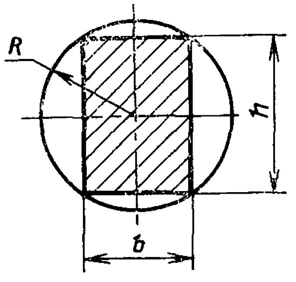
b и h — соответственно, ширина и высота балки.

Следовательно, задача сводится к максимизации целевой функции $Ц$ (эффекта $Э$)

$$Ц=Э=EI=\frac{bh^3}{12}E$$

или после сокращения на постоянный множитель $\frac{E}{12}$

$$Ц=bh^3.$$



Черт. 1

Ограничение заключается в том, что вершины углов прямоугольника лежат на окружности с радиусом R, т. е. $\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=R$.

Решение по этой модели дает $b_{\text{opt}}=R$; $h_{\text{opt}}=\sqrt{3}\,R$.

Модель 2. Найти форму головной части тела вращения (черт. 2) с минимальным сопротивлением воздуха в сверхзвуковом потоке при условии

$$\frac{r_0}{l}=\text{const} \quad \text{и} \quad r_l \ll r_0, \qquad (1)$$

где r_0 — максимальный радиус тела;

l — длина тела;

r_l — значение r при $x=l$.

Сопротивление воздуха движению тела при сверхзвуковом потоке

$$Q=2\pi q \int_{x=0}^{l} C_p(\Theta) r dr, \quad (2)$$

где $q=\frac{\rho v^2}{2}$ — скоростной напор (динамическое давление);

$r=r(x)$ — радиус тела как функция координаты x;

Θ — наклон образующей (местный угол атаки)

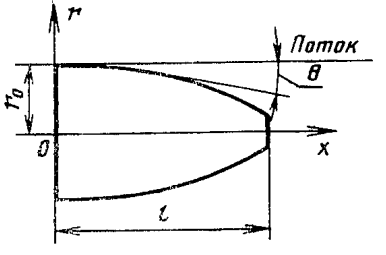
$$\operatorname{tg}\Theta=\left|\frac{dr}{dx}\right| ; \quad (3)$$

C_p — коэффициент сопротивления, который для сверхзвукового потока определяется из уравнения

$$C_p = 2\sin^2\Theta \text{ при } \Theta=0, \quad (4)$$

$$C_p=0 \quad \text{при } \Theta<0.$$

Тело вращения с минимальным сопротивлением воздуха

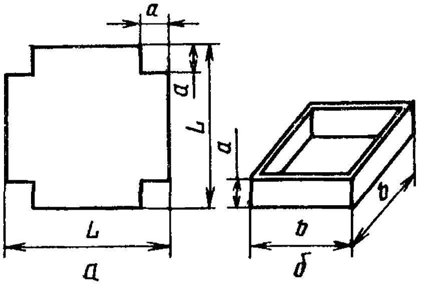


Черт. 2

Задача сводится к определению такой функции $r=r(x)$, при которой целевая функция $Ц=Q$ достигает минимума и удовлетворяются ограничения (1), (3), (4).

Принципиальной особенностью этой модели является то, что оптимизируется не величина, а функция $r(x)$.

Модель 3. Требуется из жести изготовить квадратную открытую сверху коробку. Заготовка имеет вид квадрата $L\times L$ (черт. 3*а*). При изготовлении коробки из каждого угла вырезаются небольшие квадраты $a\times a$ и стороны отгибаются. Надо найти такие размеры коробки b и a (черт. 3*б*), при которых ее объем будет максимальным при данных размерах заготовки.



Черт. 3

Здесь объем коробки V можно рассматривать как эффект и принять за целевую функцию $Ц$, которую надо максимизировать:

$$Ц=V=b^2a. \tag{5}$$

Площадь квадрата заготовки можно рассматривать как характеристику затрат $З$.

Из условия задачи вытекают следующие ограничения

$$b=L-2a, \tag{6}$$

$$З=L^2=\text{const}. \tag{7}$$

Считаем, что степень использования отрезанных квадратов не зависит от их размеров, а зависимостью затрат на изготовление коробки от a можно пренебречь.

Целевая функция (5) и ограничения (6), (7) являются математической моделью оптимизации размеров коробки b и a.

Эту модель целесообразнее представить в другом виде. Для этого (6) подставим в (5)

$$Ц=(L-2a)^2a. \tag{5а}$$

Вместо (7) запишем

$$L=\text{const}. \tag{6а}$$

Уравнения (5а), (6а) представляют собой математическую модель оптимизации размеров коробки, эквивалентную модели (5—7).

Ограничение (6а) можно подставить в (5а). Тогда математическая модель оптимизации будет состоять из одной целевой функции (5а).

Оптимальное значение высоты коробки a можно установить с помощью метода определения максимума функции, т. е. путем приравнивания нулю первой производной,

$$\frac{dЦ}{da}=L-6a_{\text{opt}}=0.$$

Откуда $a_{\text{opt}}=\dfrac{L}{6}$; $\qquad b_{\text{opt}}=L-2a=\dfrac{2}{3}L.$

При $b=\dfrac{2}{3}L$ объем достигает максимума, поскольку при $b<\dfrac{2}{3}L$ производная $\dfrac{dЦ}{da}<0$ и, наоборот, при $b>\dfrac{2}{3}L$ эта производная больше нуля.

В случае, когда целесообразно учесть затраты на сварку углов коробки, а также и то, что отходы в виде квадратов $a\times a$ реализуются, нельзя эффект $Э=V=b^2a$ принять за целевую функцию. В этом случае для формализации целевой функции необходимо использовать денежные величины, кроме технических величин [7].

2. Часто при оптимизации параметров объектов следует использовать технические величины для формализации целей и эффектов в виде экспериментальных функциональных характеристик. В качестве экспериментальной функциональной характеристики может использоваться обобщенный показатель качества оптимизируемого объекта, определяемый при испытании этого объекта в стандартизованных условиях, соответствующих его назначению и условиям эксплуатации. Например, для оценки одного из показателей эффекта применения стиральных машин (их стирающей способности) производятся их испытания путем стирки белья нормированной загрязненности и в нормированных условиях. Характеристикой эффекта служит среднее необходимое время стирки.

Экспериментальные функциональные характеристики должны использоваться тогда, когда из-за недостаточной изученности объекта и его функционирования трудно установить математические зависимости эффектов и затрат от единичных показателей качества продукции и поэтому трудно теоретически установить главный технический эффект, а проведение соответствующих экспериментов в стандартизованных условиях проще и дешевле, чем проведение соответствующих теоретических исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4
Справочное

ПОЯСНЕНИЯ К ПРИМЕНЕНИЮ МАССЫ ОБЪЕКТА В КАЧЕСТВЕ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ОПТИМИЗАЦИИ

Покажем на примере возможность некоторого несовпадения результатов оптимизации по целевой функции минимума массы с результатами оптимизации по целевой функции минимума затрат и оценим влияние этого несовпадения на точность оптимизации. Примеры показывают, что в ряде постановок задач оптимизация по минимуму массы лучше приближает к экономическому оптимуму, чем оптимизация по некоторым экономическим целевым функциям.

Например, в условиях дефицита материала и наличия некоторого несоответствия цены на материал действительным народно-хозяйственным затратам на него, вследствие неточностей ценообразования, результаты оптимизации по целевой функции минимума массы могут представить больший интерес, чем результаты оптимизации по целевой функции минимума затрат в денежном выражении.

1. Рассмотрим объект (стержневую конструкцию), состоящий из n элементов. Элемент имеет длину L_i и площадь сечения S_i.

Ограничениями в этой задаче служат:

1) условие прочности объекта

$$\sigma \leqslant \sigma_{\text{доп}}, \tag{1}$$

где σ — напряжение в материале;

$\sigma_{\text{доп}}$ — допускаемое напряжение;

2) жесткость объекта, которая может быть задана как предельно допустимое перемещение некоторых точек j объекта

$$u_j = u_{j\,\text{доп}} \tag{2}$$

или как допустимая разность между перемещениями точек j объекта и перемещением его других точек

$$u_{jq} \leqslant (u_j - u_q)_{\text{доп}}. \tag{3}$$

Требования к жесткости могут быть установлены также в виде требований к частотам собственных колебаний объекта;

3) элементы должны иметь сечения, соответствующие дискретным стандартным профилям.

Кроме того, может быть наложено большое число ограничений, связанных с функциональным назначением объекта, а в ряде случаев имеют важное значение и эстетические ограничения.

Объем объекта

$$V = \sum_{i=1}^{n} L_i S_i. \tag{4}$$

Масса материала

$$G = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i L_i S_i, \tag{4а}$$

где γ_i — плотность i-го элемента.

Стоимость этого материала

$$З = \sum_{i=1}^{n} C_i \gamma_i L_i S_i, \tag{4б}$$

где C_i — стоимость единицы массы материала i-го элемента.

Когда расход материала является решающим фактором, например, материал дефицитен и он ограничивает объем производства, или когда все остальные затраты малы или не зависят от оптимизируемых факторов, уравнения (4), (4а), (4б) могут служить целевой функцией оптимизации при $\gamma_i = \text{const}$, $C_i = \text{const}$, так как при этих условиях V, C и $З$ пропорциональны между собой.

Однако иногда целесообразнее несколько отступить от целевой функции (4). Часто выгоднее объединить элементы объекта в группы таким образом, чтобы все элементы внутри группы имели одинаковое сечение, унификацию используемых элементов. Пусть объект состоит из n элементов, каждый из которых имеет номер $k = 1, 2, \ldots, n_{\text{гр}}$.

Общая длина всех элементов группы k равна L_k, а их сечение S_k. Тогда вместо (4), (4а), (4б), соответственно, получим

$$V = \Sigma L_k S_k, \tag{5}$$

$$G = \sum_{k=1}^{n_{\text{гр}}} \gamma_k L_k S_k, \tag{5а}$$

$$З = \Sigma C_k L_k S_k, \tag{5б}$$

где γ_k и C_k — соответственно плотность и стоимость единицы массы материала k-й группы элементов.

Если стоимости единицы массы всех групп элементов одинаковы, то за целевую функцию можно принять функцию (5а). Кроме того, если все элементы выполнены из одинакового материала, то за целевую функцию можно принять функцию (5).

Выше предполагалось, что $C_k = \text{const}$ и не зависит от сечения элементов. В действительности с уменьшением сечения часто возрастает стоимость единицы массы элемента.

При оптимизации объекта, расположенного на самолете или на другом носителе, целевые функции (5) и (5а) могут оказаться лучше, чем целевая функция (5б). Это объясняется тем, что увеличение массы оптимизируемого объекта в таких случаях приводит к увеличению массы носителя и расходуемого топлива (иногда даже в десятки раз), что, как следствие, приводит к большому увеличению не только стоимости носителя, но и эксплуатационных затрат. Следовательно, в этих задачах при оптимизации объекта по минимуму массы оптимизируемого объекта в значительной степени учитывается влияние его параметров на параметры более общего комплекса, т. е. расширяются границы комплексности оптимизации [8].

2. Другим примером того, как оптимизация отдельного элемента по минимуму массы косвенно обеспечивает приближенную оптимизацию более сложного комплекса, в который этот элемент входит, является задача оптимизации шпации, т. е. расстояния между блоками перекрытия судна [10]. От величины шпаций зависят почти все размеры продольных и поперечных связей корпуса, определяющие его прочность (размеры большинства балок набора, толщина наружной обшивки и настила палуб и т. д.), а также компоновка помещений, машин и оборудования.

Поэтому минимуму массы перекрытия (или части корпуса судна) приближенно соответствует некоторая величина шпации a^G_{opt}, которая является оптимальной по критерию минимума массы. Однако оптимальная величина шпации $a^З_{\text{opt}}$ по критерию минимума затрат на проектирование, эксплуатацию и ремонт не строго совпадает с a^G_{opt}, а именно

$$a^З_{\text{opt}} > a^G_{\text{opt}}.$$

Это объясняется тем, что чем больше шпация, тем при прочих равных условиях больше толщина листов и размеры профилей, а стоимость листов, как правило, с увеличением их толщины увеличивается, стоимость же катаных профилей с увеличением их размеров — уменьшается. В результате этого стоимость материалов увеличивается не прямо пропорционально увеличению массы, а медленнее.

Трудовые затраты с увеличением шпации уменьшаются, что также приводит к несовпадению $a_{opt}^{З}$ с a_{opt}^{G}. Увеличение $a_{opt}^{З}$ по сравнению с a_{opt}^{G} происходит также вследствие уменьшения площади окраски или площади обмыва при эксплуатации.

Все рассмотренные примеры некоторого несовпадения результатов оптимизации по целевой функции минимума массы с результатами оптимизации по целевой функции минимума затрат не обязательно говорят о целесообразности оптимизации по минимуму затрат в денежном выражении, так как иногда при использовании массы в качестве целевой функции оптимизации фактически расширяются границы комплексности.

Кроме того, отклонение значений оптимизированных параметров в области близких к оптимальным сравнительно мало влияет как на значения массы, так и на значения затрат, например, отклонение шпаций на 10—15% от a_{opt} приводит к увеличению стоимости и массы лишь на 1—3%.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5
Справочное

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ОПТИМИЗИРОВАННЫХ НОРМ В ТЕХНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИНАХ

На практике определение оптимальных значений параметров объектов стандартизации часто производится с использованием только технических величин в виде соответствующих норм. При этом может отпасть необходимость в использовании математической процедуры поиска экстремума формализованной целевой функции. Вместо этого заранее для решения ряда близких между собой задач на основе анализа многолетнего опыта использования оптимизируемого объекта устанавливаются соответствующие нормы, значения которых соответствуют оптимальным значениям целевых функций. Определение оптимальных значений параметров по таким нормам часто называется обоснованием. Такое применение заранее оптимизированных норм и правил при условии их систематического обновления для учета изменений во времени технических возможностей, затрат и целей эквивалентно по получаемым результатам оптимизации в математическом смысле [1].

К нормам такого типа, например, в области машиностроения, относятся следующие предельные (допускаемые) величины: напряжение в материале, запас прочности, запас устойчивости, предельная деформация (изгиб, перемещение), допускаемое удельное давление, допускаемая нагрузка на единицу длины, удельная потенциальная энергия на единицу объема, допускаемый нагрев и др.

Большое число таких норм установлено во всех областях техники, в области охраны окружающей среды, безопасности труда и в других областях.

Проиллюстрируем применение норм на примере, когда оптимальные параметры определяются из условий прочности объекта.

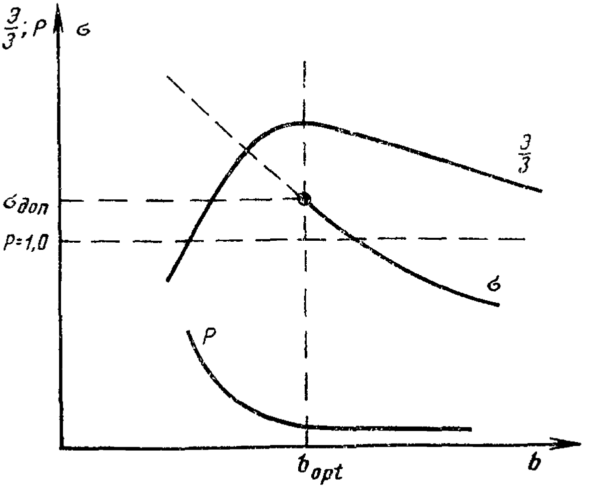
При определении толщины трубы часто можно исходить из расчета ее на прочность и выбрать такую ее толщину b_{opt}, при которой приведенное напряжение σ в наиболее напряженных ее точках равно допустимому значению (норме) $\sigma_{доп}$ (см. чертеж). Целью этого расчета является определение значения толщины, при которой $\sigma = \sigma_{доп}$.

С уменьшением толщины b в области $b < b_{opt}$ затраты на изготовление трубы уменьшаются, но снижается ее прочность; увеличивается вероятность P ее разрушения и, следовательно, затраты в эксплуатации. При увеличении толщины b в области $b > b_{opt}$ затраты на изготовление увеличиваются, но повышается прочность трубы, при правильном выборе $\sigma_{доп}$ (нормы) толщине, найденной таким расчетом, соответствует и максимальная эффективность $\frac{Э}{З}$ (чертеж).

Отличие такого расчета от оптимизации в математическом смысле заключается в отсутствии формального поиска экстремума формализованной целевой функции, а от постановки задачи с ограничением $\sigma \leqslant \sigma_{доп}$ расчет отличается тем, что отдается предпочтение равенству $\sigma = \sigma_{доп}$ относительно неравенства $\sigma < \sigma_{доп}$.

Достоинством определения оптимальных значений параметров объекта по предварительно оптимизированным нормам является упрощение расчета и, что часто важнее, использование накопленного опыта применения данного и (или) близких к нему объектов. Так, например, для составления целевой функции в приведенном примере пришлось бы не только определить вероятность разрушения трубы как функции приведенного напряжения σ в ее материале, но еще и вычислить величину потерь, вследствие возможных разрушений трубы, как случайную функцию от σ, что трудно осуществить. Как правило, целесообразно эту процедуру заменить анализом опыта и (или) суждений специалистов, производимым один раз для многих близких задач. Результатом этого анализа является установление $\sigma_{доп}$.

Использование допустимого напряжения для оптимазации



ЛИТЕРАТУРА

1. РД 50—220—80 Методические указания «Количественные методы оптимизации параметров объектов стандартизации. Классификация и область применимости теоретических методов оптимизации параметров объектов стандартизации». Изд-во стандартов.

2. ГОСТ 18.001—76 «Количественные методы оптимизации параметров объектов стандартизации. Общие положения».

3. Чуев Ю. В., Спехова Г. П. Технические задачи исследования операций. М., «Советское радио», 1971.

4. Рудинкина Л. Н. Оценка точности статистического метода расчета конструкций на прочность. М., «Вестник машиностроения», 1966, № 5.

5. Алексеев Ю. Т., Комаров Д. М. Основы теории оптимизации параметров объектов стандартизации. «Стандарты и качество», 1976, № 9.

6. Комаров Д. М. Математические модели оптимизации требований стандартов. М., Из-во стандартов, 1976.

7. Алексеев Ю. Т., Комаров Д. М. Основы теории оптимизации параметров объектов стандартизации. «Стандарты и качество», 1976, № 10.

8. РДМУ 119—78 «Количественные методы оптимизации параметров объектов стандартизации. Определение целесообразных границ комплексности и целесообразного уровня опережаемости», М., Изд-во стандартов, 1978.

9. Мажид К. И. Оптимальное проектирование конструкций. М., «Высшая школа», 1979.

10. Васильев А. П. Стандартизация в судостроении. Л., «Судостроение», 1978.

Редактор *Р. С. Федорова*
Технический редактор *Г. А. Макарова*
Корректор *А. Г. Старостин*

Сдано в наб. 19.01.81 Подп. в печ. 14.04.81 1,5 п. л. 1,40 уч.-изд. л. Тир. 16000 Цена 5 коп.

Ордена «Знак Почета» Издательство стандартов, 123557, Москва, Новопресненский пер., 3.
Калужская типография стандартов, ул. Московская, 256. Зак. 167