ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР

ПО СТАНДАРТАМ

ВНИИНМАШ

РАСЧЕТЫ И ИСПЫТАНИЯ НА ПРОЧНОСТЬ

Метод интегральных уравнений и программы расчёта на ЭВМ плоских и пространственных элементов конструкций

Р 50-54-43-88

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР ПО СТАНДАРТАМ
(Госстандарт СССР)

Всесоюзный научно-исследовательский институт
по нормализации в машиностроении
(ВНИИНМАШ)

Утверждены
Приказом ВНИИНМАШ
№ 274 от 03.9.87 г.

Расчеты и испытания на прочность

Метод интегральных уравнений и программы расчета на ЭВМ плоских и пространственных элементов конструкций

Р е к о м е н д а ц и и

Р 50-54-43-88

Москва 1988

УДК 539.3 Группа Т 51

РЕКОМЕНДАЦИИ

Расчеты и испытания на прочность

Метод интегральных уравнений и программы расчета на ЭВМ плоских и пространственных элементов конструкций

Рекомендации

Р 50-54-43-88

ОКСТУ 4103

Настоящие рекомендации распространяются на расчет трехмерных и плоских составных объектов, подверженных статическим нагрузкам при смешанных граничных условиях и различных вариантах сопряжения однородных элементов.

В рекомендациях приводится численно-аналитический метод потенциала [1-9] для решения линейных и нелинейных задач механики твердых деформируемых тел, принципиально отличающихся от других универсальных численных методов (конечных элементов, сеток, вариационно-разностных), системные средства реализации которых получили наибольшее распространение.

Усилия и перемещения по произвольному множеству точек области определяются на основе дискретного анализа систем функциональных уравнений, сформированных относительно неизвестных перемещений и реакций на границе, и последующих независимых вычислений каждого отдельного компонента во внутренних точках. Поэтому при реализации метода потенциала дискретизации подвергаются только граница области и число определяющих неизвестных, полученных в результате решения аппроксимирующей системы алгебраических уравнений, сокращается по сравнению с сеточными методами. Отсюда повышение эффективности всего вычислительного процесса, в частности, сокращение объема и трудоемкости подготовки исходной информации.

Предлагаемый метод ориентирован на автоматизированное проектирование ответственных реальных объектов техники. В основе его лежит исследование напряженно-деформированных состояний конструкций в различных условиях их эксплуатации и изготовления с учетом сложности конфигурации, ограниченности или бесконечности области, варьирования смешанных граничных условий составных элементов, силовых и температурных нагрузок, линейности и нелинейности деформирования, полноты пространственного представления тела, введения различных упрощающих гипотез для исследования особенностей исследуемого состояния и т.п.

Численно-аналитический метод потенциала реализован в пакетах прикладных программ "Потенциал-2" и "Потенциал-3" в развитие ППП "Потенциал-I", сданного в Государственный и Республиканский фонды алгоритмов и программ [7] .

Подлинники программ хранятся в Киевском ордена Трудового Красного Знамени инженерно-строительном институте.

Рекомендации предназначены для специалистов НИИ, КБ и заводских лабораторий, занимающихся расчетами на прочность изделий машиностроения.

I. ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

E – модуль упругости, Па;
μ – модуль сдвига, Па;
ν – коэффициент Пуассона;
НДС – напряженно-деформированное состояние;
ППП – пакет прикладных программ;
ЕС – единая серия;
ЭВМ – электронно-вычислительная машина;
ОС – операционная система;
МД – магнитный диск (том прямого доступа);
МЛ – магнитная лента;
ВЗУ – внешние запоминающие устройства;
АЦПУ – алфавитно-цифровое печатающее устройство;

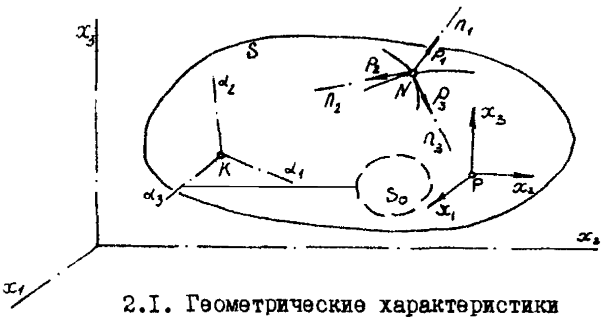
$u_\ell^{(\lambda)} u_i^{*(n)}(K,N)$ – перемещения точки N в направлении оси h_j при действии в точке K единичной сосредоточенной силы в направлении оси d_ℓ ;

$u_\ell^{(\lambda)} \sigma_{ij}^{(n)}(K,N)$ – компоненты тензора напряжений в точке N в направлении осей h_i при действии в точке K единичной сосредоточенной силы вдоль оси d_ℓ .

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.I. Пространственные задачи теории упругости

2.I.I. Исследуется напряженно-деформированное состояние объекта, который занимает область S с ослаблениями S_0 и имеет границу Γ (рис.2.I).



2.I. Геометрические характеристики пространственного объекта

Для описания геометрии используется общая декартова система координат $Ox_1x_2x_3$. В общем случае рассматривается составной объект с кусочно-постоянными характеристиками. Деформируемое тело находится под действием статически уравновешенной системы внешних сил и реакций связей. Обобщенные нагрузки могут представляться полем массовых внутренних сил, которые в каждой точке заданы проекциями векторов X_i на координатные оси $0x_1x_2x_3$ и системой поверхностных нагрузок P, приложенных на границе Γ. Поверхностные усилия P определяются своими проекциями P_i как в системе $\{x_i\}$, так и в местной системе ортогональных координат $\{n_i\}$, связанной с произвольной точкой $N_j \in$. Компоненты напряженно-деформированного состояния в точке $K \in S$ будем считать отнесенными к ортогональной системе координат $\{\alpha_i\}$ с центром в точке K .

2.I.2. При решении статических задач состояние тела характеризуется полями перемещений U , имеющих проекции U_j на выбранные системы координат. Относительные деформации ε_{ij} описываются производными по координатам от U_j [I5]

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(U_{i,j} + U_{j,i}),\ (i,j=1,2,3)\ . \quad (2.I)$$

Примечание. Здесь и далее индексы, встречающиеся в левой и правой частях формул, будем считать свободными и суммирование по ним не производить.

2.I.3. Напряжение σ_{ij} и деформации ε_{ij} связаны между собой законом Гука

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda e + 2\mu\varepsilon_{ij}. \quad (2.2)$$

где E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона,

$\lambda = E\nu[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}$ – коэффициент Ляме, $\mu = 0.5E(1+\nu)^{-1}$ – модуль сдвига, $e = \delta_{kk}$ – относительная объемная деформация, $(\delta_{ij} = 1,\ i = j),\ (\delta_{ij} = 0,\ i \neq j)$ – символ Кронекера.

2.I.4. Справедливы уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,k} + X_i = 0. \qquad (2.3)$$

2.I.5. Граничные условия могут задаваться в напряжениях

$$P_i = \sigma_{ij} t_j , \qquad (2.4)$$

где t_j – направляющие косинусы нормали к поверхности.

2.I.6. Систему дифференциальных соотношений (2.I)-(2.4) завершают условия неразрывности деформаций

$$2\mu \nabla^2 \varepsilon_{ij} + 2(\lambda + \mu) e_{,ij} = -(X_{i,j} + X_{j,i}); \qquad (2.5)$$

$\nabla^2 = _{,kk}$ – оператор Лапласа.

2.I.7. Решение задачи линейной теории упругости описывается системой трех уравнений эллиптического типа в перемещениях

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) e_{,i} + X_i = 0. \qquad (2.6)$$

2.I.8. Однозначное определение функций, входящих в уравнения (2.I)-(2.6), при заданной системе внешних нагрузок X_i и P_i зависит от точности удовлетворения граничных условий на Γ. Часть граничной поверхности Γ_u может находиться под действием такой системы нагрузок, при которой в произвольной точке $N \in \Gamma_u$ перемещения U_i определяются заданной кинематической функцией $f_i(N)$ (первая краевая задача [9]):

$$u_i(N) = f(N). \qquad (2.7)$$

В этом случае граничными неизвестными являются компоненты вектора поверхностных усилий P_i. На другой части границы Γ_P известны статические условия

$$P_i = f_i(N), \qquad (2.8)$$

а точки $N \in \Gamma_P$ свободны в своих перемещениях $U_i(N)$ (вторая краевая задача). Может также задаваться сочетание кинематических и статических граничных условий

$$U_k(N) = f_k(N), \; P_l(N) = f_l(N), \; N \in \Gamma_{UP}, \; k+l=3, \qquad (2.9)$$

Неизвестными являются недоопределенные компоненты вектора перемещений $U_i(N)$ и усилий $P_i(N)$ (третья краевая задача).

Используем еще два типа граничных условий. Так, если между векторами граничных усилий и перемещений имеется некоторая функциональная связь вида

$$P_i(N) = f[U_i(N)], \qquad (2.10)$$

то задача нахождения неизвестных компонентов формально разрешается определением $P_i(N)$ или $U_i(N), N \in \Gamma$. Частный случай такого типа граничных условий – связь между контактными усилиями P_i и перемещениями U_i на поверхности тела, опирающегося на упругое параметрическое основание, работа которого описывается гипотезой Винклера [10]

$$P_i(N) = -k_i U_i(N), \qquad (2.11)$$

где k_i – коэффициент постели упругого основания (скалярная величина).

Еще один вариант граничных условий возникает на участке контакта двух упругих тел. Хотя в этом случае граничные условия для каждого тела неизвестны, могут быть сформулированы функции связи этих элементов (неразрывность, проскальзывание, трение или другие комбинации). На участке сопряжения двух тел выделяются 6 независимых компонентов векторов усилий и перемещений. Тогда остальные 6 компонентов известны или выражаются через независимые неизвестные и краевая задача также однозначно разрешима.

Например, в случае неразрывности усилий и перемещений на границе контакта имеются 6 соотношений вида

$$P_i^{(1)}(N) = P_i^{(2)}(N), \; U_i^{(1)}(N) = U_i^{(2)}(N). \qquad (2.12)$$

В (2.12) индексами 1 и 2 отмечены компоненты граничных условий, относящиеся соответственно к первому и ко второму телам.

Во многих случаях граничные условия удобно задавать, заменяя U_i и P_i компонентами $U_i^{(n)}$ и $P_i^{(n)}$, ориентация которых определяется ортогональными направлениями внешней нормали n_1 и осей n_2, n_3, обычно связываемых с главными кривизнами поверхности Γ.

2.2. Плоские задачи теории упругости

2.2.1. Рассмотренные соотношения классической теории упругости удовлетворяются при исследовании массивных тел, имеющих протяженность одного порядка во всех трех направлениях. При значительном уменьшении одного из характерных размеров по сравнению с остальными становится возможным переход к специально построенным упрощенным расчетным моделям. В частности, если внутри области S все площадки одного направления (например, перпендикулярные к оси x_3) являются заведомо главными, пространственная задача вырождается в плоскую [15] .

2.2.2. При выводе основных соотношений плоской задачи предполагается, что $\sigma_{31}=\sigma_{32}=0$, а σ_{33} или равняется нулю (плоское напряженное состояние), или выражается через σ_{11} и σ_{22} (плоская деформация). Разрешающая система двух уравнений ($i,j=1,2$) остается подобной (2.6), где вместо λ записывается λ_0 ($\lambda_0=\lambda$ - для плоской деформации, $\lambda_0=2\lambda\mu(\lambda+2\mu)^{-1}=E\nu(1-\nu^2)^{-1}$ - для плоского напряженного состояния):

$$\mu \nabla_1^2 u_i + (\lambda_0+\mu)e_{,i} + X_i = 0. \qquad (2.13)$$

Граничные условия также представляются независимо от x_3 .

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

3.1. Теорема о взаимности работ. Интегральные представления Сомилиана

3.1.1. Метод решения граничных задач основан на применении принципа взаимности обобщенных работ двух объектов, между множествами точек которых можно установить однозначное соответствие. Напряженно-деформированное состояние одного тела - объекта исследования назовем основным, а другого - вспомогательным. Предполагается, что оба тела выполнены из изотропного материала с одинаковыми физико-механическими характеристиками. Они геометрически тождественны друг другу и различаются лишь нагружением и закреплением.

3.1.2. При построении разрешающих интегральных соотношений численно-аналитического метода потенциала целесообразно ограничить систему внешних воздействий во вспомогательном состоянии сосредоточенными единичными нагрузками, не накладывая каких-либо ограничений на нагружение тела в основном состоянии. Под действием единичной силы $\delta_\ell^{(\alpha)*}$ в точке $K \in S$ на границе Γ вспомогательного тела возникает система реактивных усилий $P_i^{(n)*}(N)$ и перемещений $U_i^{(n)*}(N)$, ориентированных в местной системе координат $\{n_i\}$ в точках $N \in \Gamma$.

В этом случае уравнение (3.9) принимает вид

$$\delta_i^{(\alpha)*} u_i(K) = \int_S X_i u_i^* dS + \int_\Gamma u_j^{(n)}(N) u_i^{(\alpha)} P_j^{(n)*}(K,N) d\Gamma - \int_\Gamma P_j^{(n)} u_i^{(\alpha)} U_j^{(n)*}(K,N) d\Gamma, \quad (i,j = 1,2,3). \tag{3.I}$$

Соотношение (3.I) – интегральное представление перемещений произвольной точки K по направлению α_j, выраженному функционально через перемещения $U_j^{(n)}(N)$ и усилия $P_j^{(n)}(N)$ на границе. Γ.

3.I.3. Рассматривая (3.I) как функционал перемещений основного состояния и применяя к нему дифференциальные операторы деформаций (2.I) или закон Гука (2.2), получаем полную систему интегральных представлений компонентов векторов перемещений и тензоров деформаций и напряжений. Для выражения системы интегральных представлений введем символ $\mathfrak{R}_{k\ell}^{(\alpha)}$, указывающий на произвольный характер интегрального представления. Для линейного напряженно-деформированного состояния $\mathfrak{R}_{k\ell}^{(\alpha)}$ может рассматриваться как диф(ференциальный оператор (2.I) или (2.2), действующий на функционалы перемещений и напряжений вспомогательного состояния. Это эквивалентно действию во вспомогательном состоянии отличного от единичной силы источника, взаимного $\mathfrak{R}_{k\ell}^{(\alpha)}$ и вызывающего на границе Γ соответствующие ему перемещения $\mathfrak{R}_{k\ell}^{(\alpha)} U_i^{(n)*}(K,N)$ и реактивные усилия $\mathfrak{R}_{k\ell}^{(\alpha)} P_i^{(n)*}(K,N)$

Таким образом, обобщенная система интегральных представлений будет иметь вид

$$\mathfrak{R}_{k\ell}^{(\alpha)}(n) = \int_S X_i \mathfrak{R}_{k\ell} U_i^* dS + \int_\Gamma U_i^{(n)}(N) \mathfrak{R}_{k\ell}^{(\alpha)} P_i^{(n)*}(K,N) d\Gamma - \int_\Gamma P_i^{(n)}(N) \mathfrak{R}_{k\ell}^{(\alpha)} U_i^{(n)*}(K,N) d\Gamma \tag{3.2}$$

Обычно в (3.2) краевые условия определяют лишь половину компонентов усилий и перемещений на границе Γ основного состояния, другая половина компонентов должна быть найдена в процессе решения граничной задачи.

3.2. Универсальные вспомогательные состояния

3.2.1. Для построения общего численно-аналитического метода во вспомогательном состоянии рассматривается область S, выделенная из бесконечного изотропного пространства S_∞, с физико-механическими характеристиками, соответствующими заданным для тела S в основном состоянии. Бесконечная среда S_∞ нагружена сосредоточенной силой $\delta^{(\alpha)*}(K)$, под действием которой на границе $S \in S_\infty$ образуется система реактивных усилий $P_i^*(N)$ и перемещений $U_i^*(N)$. Образованное таким образом вспомогательное состояние будем называть универсальным. Источником получения универсальных вспомогательных состояний являются известные системы фундаментальных решений, определяющих поведение бесконечных или частично бесконечных сред под действием сосредоточенных нагрузок.

3.2.2. Универсальное вспомогательное состояние для общего случая исследования пространственного тела S строится на основе решения задачи Кельвина [9,15] :

$$U_i^{(n)}U_j^{(n)*}(K,N) = \left[16\pi\mu(1-\nu)r\right]^{-1}\left[(3-4\nu)\delta_{ij} + n_j n_i r^{-2}\right]. \quad (3.3)$$

В соотношениях (3.1)-(3.3) $r^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ - расстояние между точкой $K \in S$ и точкой $N \in \Gamma$; i =1,2,3 - индекс оси системы координат $\{\alpha_i\}$ в точке K, по направлению которой действует единичная сосредоточенная сила $\delta^{(\alpha)*}(K) = 1$; j =1,2,3- - индекс оси системы координат, относительно которой определяется перемещение.

3.2.3. Если системы координат $\{\alpha_i\}$ и $\{n_j\}$ произвольно ориентированы в пространстве, то перемещения точки $N \in \Gamma$ в системе $\{n_j\}$ от единичных сил, прикладываемых в K по направлению $\{\alpha_i\}$, определяется выражением

$$U_i^{(\alpha)}U_j^{(n)*}(K,N) = C_{ik}\, U_k^{(n)}U_j^{(n)*}(K,N) . \quad (3.4)$$

В (3.4) C_{ik} - матрица направляющих косинусов, которая связывает системы $\{\alpha_i\}$ и $\{n_j\}$:

$$\alpha_\ell = C_{\ell k}\, n_k . \quad (3.5)$$

3.2.4. Для определения компонентов тензоров напряжений во вспомогательном состоянии при действии единичной силы $\delta^{(\alpha)}(K) \in S_\infty$ необходимо к компонентам матрицы перемещений Кельвина (3.3) применить соотношение (2.2). Тогда

$$U_l^{(\alpha)}\sigma_{ij}^{(n)*}(K,N) = c_{lk}\, U_k^{(n)}\sigma_{ij}^{(n)*}(K,N),$$

$$U_l^{(n)}\sigma_{ij}^{(n)*}(K,N) = [8\pi(\nu-1)]^{-1}[(1-2\nu)(\delta_{lj}n_i + \delta_{li}n_j - \qquad (3.6)$$

$$-\delta_{ij}n_l)r^{-3} + 3n_i n_j n_l r^{-5}].$$

Если в точках $N \in \Gamma$ местная система координат ориентирована таким образом, что ось n_1 совпадает с внешней нормалью, то элементы матрицы векторов усилий определяются из (3.6):

$$U_l^{(\alpha)}P_i^{(n)}(K,N) = c_{lk}\, U_k^{(n)}\sigma_{1i}^{(n)*}(K,N). \qquad (3.7)$$

3.2.5. Компоненты тензора напряжений в точке K основного состояния, входящие в тождество Сомилиана (3.2), получим при действии соответствующих дифференциальных операторов на $U_l^{(\alpha)}(K)$:

$$\mathcal{R}_{ml}(K) = [\delta_{ml}\lambda e^{(\alpha)} + 2\mu\varepsilon_{ml}^{(\alpha)}][U_l^{(\alpha)}(K)] = \sigma_{ml}^{(\alpha)}(K). \qquad (3.8)$$

Перемещения в интегральных представлениях (3.3) напряжений определяются выражением

$$\sigma_{ml}^{(\alpha)}U_i^{(n)*}(K,N) = c_{mt}c_{lk}\,\sigma_{kt}^{(n)}U_i^{(n)*}(K,N). \qquad (3.9)$$

3.2.6. Вследствие тождественности дифференциальных операторов, действующих на матрицу Кельвина при формировании компонентов перемещений интегральных представлений напряжений и компонентов напряжений интегральных представлений перемещений в местной системе координат $\{n_i\}$ в $K \in S$, совпадают величины

$$U_l^{(n)}\sigma_{ij}^{(n)*}(K,N) = \sigma_{ij}^{(n)}U_l^{(n)*}(K,N). \qquad (3.10)$$

3.2.7. Применяя дифференциальный оператор напряжений (3.8) к компонентам интегрального представления перемещений (3.6), получим составляющие тензоров напряжений интегральных представлений напряжений

$$\sigma_{ml}^{(\alpha)}\sigma_{ij}^{(n)*}(K,N) = c_{mt}\,c_{lk}\,\sigma_{kt}^{(n)}\sigma_{ij}^{(n)*}(K,N);$$

$$\sigma_{ml}^{(n)}\sigma_{ij}^{(n)*}(K,N) = -\mu[4\pi(1-\nu)]^{-1}[(1-2\nu)r^{-3}(\delta_{mj}\delta_{li} + \delta_{mi}\delta_{lj} - \delta_{ml}\delta_{ij}) +$$

$$+2\nu r^{-5}\delta_{ml}\delta_{ij} + 3(1-2\nu)r^{-5}(\delta_{ml}\delta_{ij}n_i n_j + \delta_{ij}n_l n_m) + 3\nu r^{-5}(\delta_{mi}n_l n_j +$$

$$+\delta_{lj} n_m n_i + \delta_{mi} n_l n_j + \delta_{li} n_m n_j) - 15 r^{-7} n_m n_l n_i n_j] , \qquad (3.11)$$

Компоненты векторов усилий на границе Γ области аналогично (3.7) определяется как частный случай (3.II):

$$\sigma_{ml}^{(\alpha)} p_i^{(n)*}(K,N) = C_{mt} C_{lk} \sigma_{kt}^{(n)} \sigma_{il}^{(n)*}(K,N) . \qquad (3.12)$$

3.2.8. Для плоского напряженного состояния и плоской деформации универсальное вспомогательное состояние получаем, выделяя область S из соответствующей двумерной среды S_∞ ,нагруженной единичным сосредоточенным воздействием. Матрица Кельвина в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} u_i^{(H)} u_j^{(n)*}(K,N) &= C_{ik}' u_k^{(n)} u_j^{(n)*}(K,N); \\ u_i^{(n)} u_j^{(n)*}(K,N) &= H(n_i n_j r^{-2} - \varkappa \delta_{ij} \ln r), \end{aligned} \qquad (3.13)$$

где $H = [2\pi\mu(1+\varkappa)]^{-1}$;

$\varkappa = 3 - 4\nu$ – для плоской деформации;

$\varkappa = (3-\nu)(1-\nu)^{-1}$ – для плоского напряженного состояния.

3.2.9. Как видно из сравнения (3.4) и (3.I3), между компонентами этих формул существует формальное соответствие. Поэтому можно ограничиться выражениями для перемещений и напряжений вспомогательного состояния при α_i и $n_j \equiv \alpha_j$. В этом случае компоненты напряжений универсального вспомогательного состояния для интегральных представлений перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} u_l^{(n)} \sigma_{ij}^{(n)*}(K,N) &= H\mu[(1-\varkappa)\delta_{lj} n_i + \delta_{li} n_j - \\ &- \delta_{ij} n_l) r^{-2} - 4 n_l n_j r^{-4}] . \end{aligned} \qquad (3.14)$$

Компоненты граничных усилий для двумерного напряженно-деформированного состояния определяются из (3.4), (3.I4) при $l, i, k =$ $= 1,2$.

3.2.I0. Для интегрального представления напряжений в плоской задаче теории упругости справедливы также формулы (3.9) и (3.I0). Компоненты тензоров напряжений универсального вспомогательного состояния образуются аналогично (3.II) и при $\alpha_i \equiv n_i$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{ml}^{(n)} \sigma_{ij}^{(n)*}(K,N) &= 4\mu^2 H[8 n_i n_j n_m n_l r^{-6} - \\ &-(\delta_{mj} n_l n_i + \delta_{li} n_m n_j + \delta_{mi} n_l n_j + \delta_{lj} n_m n_i) r^{-4} - \delta_{ml} \delta_{ij} r^{-2}] \end{aligned} \qquad (3.15)$$

Усилия на границе Γ также описываются выражениями (3.12).

3.3. Дискретизация интегральных представлений

3.3.1. Интегральные представления (3.2) формально позволяют свести задачу по определению компонентов, характеризующих напряженно-деформированное состояние объекта исследования для произвольного множества точек $K_i \in S$, к последовательности независимых вычислений для каждой i -й точки.

Рассмотрим произвольный многогранник (многоугольник) S_i. близкий области S и используем его границу как базу для аппроксимации действительной поверхности (контура) Г. Предположим, что для S' остается в силе критерий сглаживаемости Ляпунова на тех участках границы, где он был справедлив до аппроксимации. Тогда соотношение (3.2) будет эквивалентно следующему выражению:

$$\mathfrak{R}_{ml}^{(\alpha)}(K) = \sum_{t=1}^{c} \Big[\int_{\Gamma_t} u_i^{(n)}(N) \mathfrak{R}_{ml}^{(\alpha)} P_i^{(n)*}(K,N)\, d\Gamma_t - \int_{\Gamma_t} P_i^{(n)}(N) \mathfrak{R}_{ml}^{(\alpha)} u_i^{(n)*}(K,N)\, d\Gamma_t \Big] + \int_S X_i \mathfrak{R}_{ml}^{(\alpha)} u_i^{*}\, dS, \qquad (3.16)$$

если C – количество неискривленных базисных элементов – неограниченно возрастает $C \to \infty$, а $S' \to S$.

3.3.2. В (3.16) функции граничных плотностей эластопотенциалов, определяющие значения перемещений и усилий на границе Γ основного состояния, также следует заменить эквивалентными функциями на совокупности неискривленных базисных элементов. С этой целью могут применяться различные варианты аппроксимаций полиномиальными (сплайновыми) функциями на построенном базисе[3].

В настоящей работе для решения задач различных классов будем использовать простейший, но в то же время достаточно общий способ кусочно-постоянного представления усилий и перемещений основного напряженно-деформируемого состояния исследуемого объекта S, отождествляемого с многогранником S'. Это допущение приводит к преобразованию (3.16) в виде

$$\mathfrak{R}_{ml}^{(\alpha)}(K,N) = \sum_{t=1}^{c} \Big[u_i^{(n)}(N_t) \int_{\Gamma_t} \mathfrak{R}_{ml}^{(\alpha)} P_i^{(n)*}(K,N_t)\, d\Gamma_t - P_i^{(n)}(N_t) \int_{\Gamma_t} \mathfrak{R}_{ml}^{(\alpha)} u_i^{(n)*}(K,N_t)\, d\Gamma_t \Big] + \int_S X_i \mathfrak{R}_{ml} u_i^{*}\, dS \qquad (3.17)$$

3.4. Аналитическое определение усилий и перемещений вспомогательного состояния на неискривленных базисных фрагментах поверхности

3.4.1. Для вычисления дискретных компонентов (3.17) разработана универсальная методика [1–7], позволяющая путем простейших преобразований свести задачу получения значений определенных интегралов к серии операций над матрицами, обладающими большой компактностью и хорошо исследованными свойствами.

3.4.2. Рассмотрим произвольный плоский базисный фрагмент, ограниченный замкнутым многоугольником $A_1 A_2 \ldots A_j$. В точке K имеется некоторая прямоугольная система координат $\{\alpha_i\}$. Разместим в точке K еще одну систему координат $\{n_i\}$ таким образом, чтобы координатная ось n_1 была перпендикулярна к плоскости $A_1 A_2 \ldots A_j$. Координатные системы $\{\alpha_i\}$ и $\{n_i\}$ взаимосвязаны с помощью матрицы направляющих косинусов C_{ij} (рис.3.1).

3.4.3. Используя только преобразования вращения систем координат, из соотношений (3.3), (3.4), (3.5), (3.8), (3.10) получим выражения для перемещений и напряжений, вызванных произвольно ориентированными воздействиями во вспомогательных состояниях.

Значения интеграла функций усилий и перемещений вспомогательного состояния по области плоского многоугольника определяются в результате последовательного суммирования по треугольным подобластям $K_1 A_j A_{j+1}$, где $K_1 \in A_1 A_2 \ldots A_j$, $KK_1 \perp A_1 A_2 \ldots A_j$ (рис. 3.1) или

$$\int\limits_{A_1A_2\ldots A_j} \mathfrak{R}^{(n)}_{ml}\,\mathfrak{R}^{(n)*}_{i}(K,N)\,ds = \sum_{K_1A_lA_{l+1}} \mathfrak{R}^{(n)}_{ml}\,\mathfrak{R}^{(n)*}_{i}(K,N)\,dS\,. \quad (3.18)$$

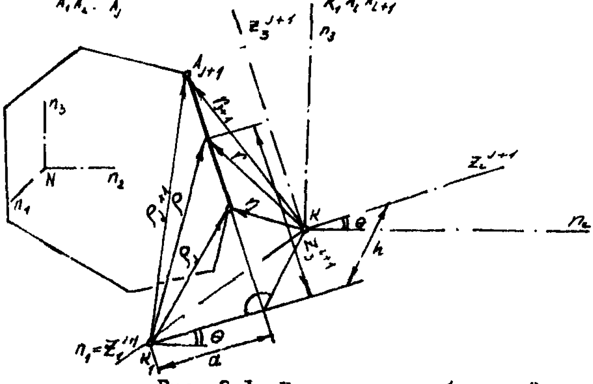


Рис. 3.1. Приведение к базисной системе интегрирования в трехмерной задаче

3.4.4. Вычисление значений определенных интегралов по формуле (3.18) упрощается при использовании преобразования вращения в единой фиксированной системе координат $\{z_i\}$: ось $n_1 \equiv z_1$ проходит через точки K и K_1 ; ось z_2 перпендикулярна к $A_i A_{i+1}$; z_3 параллельна $A_i A_{i+1}$.

Тогда

$$n_l = S_{li}^{(j)} z_i^j, \tag{3.19}$$

где S_{li}^j матрица поворота вокруг оси z_1 для каждой стороны

$$S_{li}^j = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} . \tag{3.20}$$

3.4.5. Используя матрицу вращения (3.20), получим формулы для преобразования компонентов напряженно-деформированного состояния:

$$\begin{aligned} &\int_{A_1 A_2 \dots A_j} u_i^{(n)} u_l^{(n)*}(K,N)\,d\Gamma = \sum_{j=1} S_{im}^j S_{ln}^j \int_{\Delta K_1 A_j A_{j+1}} u_m^{(z)} u_n^{(z)*}(K,N)\,d\Gamma ; \\ &\int_{A_1 A_2 \dots A_j} u_i^{(n)} \sigma_{kl}^{(n)*}(K,N)\,d\Gamma = \sum_{j=1} S_{im}^j S_{kn}^j S_{lp}^j \int_{\Delta K_1 A_j A_{j+1}} u_m^{(z)} \sigma_{lp}^{(z)*}(K,N)\,d\Gamma ; \\ &\int_{A_1 A_2 \dots A_j} \sigma_{il}^{(n)} \sigma_{kq}^{(n)*}(K,N)\,d\Gamma = \sum_{j=1} S_{im}^j S_{ln}^j S_{kp}^j S_{qt}^j \int_{\Delta K_1 A_j A_{j+1}} \sigma_{mn}^{(z)} \sigma_{pt}^{(z)*}(K,N)\,d\Gamma . \end{aligned} \tag{3.21}$$

3.4.6. Представление функций под знаком интеграла (3.21) позволяет построить матрицы характеристик напряженно-деформированного состояния в замкнутом виде и обеспечить эффективность вычислительного процесса. При этом интегралы не расчленяются на сумму простейших, что позволяет сохранить их физический смысл. Интегральные характеристики величин усилий и перемещений на неискривленных базисных фрагментах в системе $\{z_i\}$ определяются выражением

$$\int_{\Delta K_1 A_j A_{j+1}} \mathfrak{X}_{ij}^{(z)} \mathfrak{X}_{lm}^{(z)}(K,N)\,dS = \int_0^a \int_0^{K_1 z_3} \mathfrak{X}_{ij}^{(z)} \mathfrak{X}_{lm}^{(z)}(K,N)\,dz_2\,dz_3 , \tag{3.22}$$

где $a = \rho\cos\varphi$ – расстояние от точки K_1 до прямой $A_j A_{j+1}$;

$l = \rho\sin\varphi$ – длина прямой, отсчитанная от точки пересечения прямой $A_j A_{j+1}$ с перпендикуляром a, в формулах, приведенных далее, отождествляется с z_3, характеризуя линейный размер и направление; ρ – проекция радиуса-вектора r на плоскости.

3.4.7. Замкнутые аналитические выражения, определяющие все интегральные характеристики перемещений и усилий на границе вспомогательного состояния системы алгебраических аналогов интегральных представлений (3.12), приведены в приложениях.

4. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ, ПЕРЕЧЕНЬ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ И ПОЛУЧАЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

4.I. Решение граничной задачи

4.I.I. На первом этапе расчета построенные функциональные уравнения решаются на основе численно-аналитического метода. При этом аппроксимирующие линейные алгебраические системы можно представить в общем матричном виде

$$[A]\{x\}=[B]\{y\}, \tag{4.I}$$

где $\{x\}$ и $\{y\}$ объединяют соответственно неизвестные и известные дискретные значения плотностей эластопотенциалов в зависимости от граничных условий и нагружения тела; $[A]$ и $[B]$ – матрицы, члены которых вычисляются как интегралы функций компонентов вспомогательных состояний (см. разд. 3.2).

Определение неизвестных $\{x\}$ связано с определенными трудностями как теоретического, так и вычислительного характера. Хотя применение метода потенциала на единицу снижает размерность разрешающих соотношений по сравнению с размерностью самой задачи, порядок алгебраических систем (4.I) при расчете реальных объектов весьма высок (особенно при исследовании трехмерных тел).

Кроме того, коэффициент заполнения матрицы $[A]$, представляющий собой отношение количества ненулевых элементов к общему числу элементов матрицы, обычно близок к единице. Поэтому для формирования и решения системы (4.I) при численной реализации необходимо использовать внешние запоминающие устройства ЭВМ, что существенно усложняет вычислительный процесс.

4.I.2. В настоящей работе приводится прямой алгоритм решения граничной задачи. При его использовании матрицы $[A]$ и $[B]$ формируются последовательным обходом границы объекта и вычислением для каждой узловой точки N_{oj} строки коэффициентов при неизвестных в узлах N_{om} по формулам (3.21), где принят кусочно-постоянный закон изменения неизвестных в пределах элементов границы Γ_m, центры тяжести которых отождествляются с узловыми точками N_{om}.

4.1.3. Построение прямого алгоритма и его сходимость при сгущении сети элементов на границе Γ покажем на примере следующей трехмерной задачи теории упругости. Квадратная в плане пластина (рис. 4.1) защемлена по боковым граням, к плоскости $x_1 = H$ приложена равномерно распределенная нагрузка единичной интенсивности, поверхность $x_1 = 0$ свободна. Отношение толщины H к размеру в плане L: H/L = 1/4; 1/2 и 1. Модуль упругости плиты условно принят единичным, а коэффициент Пуассона ν = 0,3. Граничные условия задачи характеризуются соотношениями $u^{(n)}/_{x_2 = x_3 = \pm L/2} = 0\ (\Gamma_\sigma)$; $p_1^{(n)}/_{x=H} = -q$, $p_2^{(n)} = p_3^{(n)}/_{x=H}\ (\Gamma_q)$, $p_i^{(n)}/_{x=0} = 0\ (\Gamma_u)$.

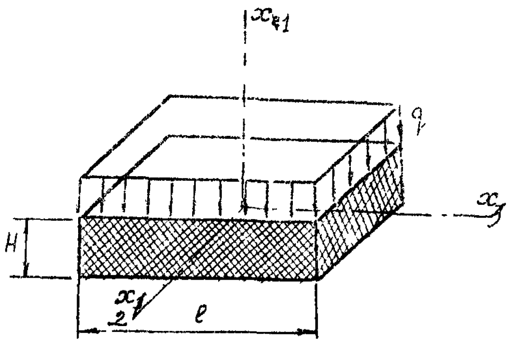


Рис. 4.1. Толстая защемленная плита

Сгущение разбивочной сети на граничной поверхности плиты производилось в соответствии со схемой на рис. 4.2 (тонкой линией показан принцип сгущения) при выборе по толщине плиты n = 4, 6,8,10 фрагментам. При использовании кусочно-постоянной аппроксимации неизвестных разрешающая система имеет вид:

для $N_{oj} \in \Gamma$ $(1 \leq t \leq m_1)$

$$\sum_{j=1}^{m_1} \Big\{ \sum_{t=1}^{m_1} p_i^{(n)}(N_{ot}) \int_{\Gamma_\sigma^t} u_k^{(\alpha)} u_i^{(n)}(N_{oj}, N)\, d\Gamma -$$

$$- \sum_{t=m_1+1}^{m_2} u_i^{(n)}(N_{ot}) \int_{(\Gamma_u + \Gamma_q)} u_k^{(\alpha)} p_i^{(n)}(N_{oj}, N)\, d\Gamma +$$

$$+p_i^{(n)}(N_{oj})R\int_{\Gamma_\sigma^j} u_k^{(\alpha)}u_i^{(n)}(N_{oj},N)d\Gamma = q\sum_{t=p_1}^{p_2}\int_{\Gamma_q^t} u_k^{(\alpha)}u_1^{(n)}(N_{oj},N)d\Gamma\};$$

$$N_{oj}\in\Gamma_q+\Gamma_u \quad (m_1+1\leq t\leq m_2); \tag{4.2}$$

для $N_{oj}\in\Gamma_q+\Gamma_u \quad (m_1+1\leq t\leq m_2)$

$$\sum_{j=m_1+1}^{m_2}\{\sum_{t=1}^{m_1} p_i^{(n)}(N_{ot})\int_{\Gamma_\sigma^t} u_k^{(\alpha)}u_i^{(n)}(N_{oj},N)d\Gamma -$$

$$-\sum_{t=m_1+1}^{m_2} u_i^{(n)}(N_{ot})\int_{(\Gamma_u+\Gamma_q)^t} u_k^{(\alpha)}p_i^{(n)}(N_{oj},N)d\Gamma -$$

$$-u_i(N_{oj})[\delta_{ik}+\int_{(\Gamma_u+\Gamma_q)^t} u_k^{(\alpha)}p_i^{(n)}(N_{oj},N)d\Gamma] =$$

$$=q\sum_{t=p_1}^{p_2}\int_{\Gamma_q^t} u_k^{(\alpha)}u_1^{(n)}(N_{oj},N)d\Gamma\}. \tag{4.3}$$

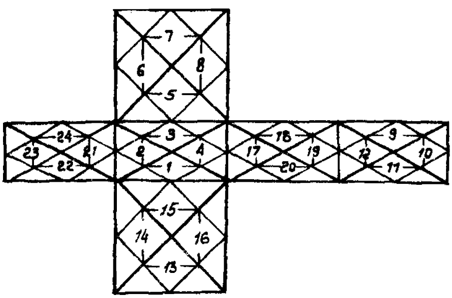


Рис. 4.2. Фрагментация граничной поверхности

Для оценки влияния изменения разбивочной сети граничной поверхности на точность результатов при различных значениях вычислялись перемещения u_1 и напряжения σ_{11} в точках, расположенных внутри объекта вдоль прямой $x_2 = x_3 = 0$. Результаты вычислений показаны на рис. 4.3 в виде графиков изменения u_1 и σ_{11} вдоль оси x_1.

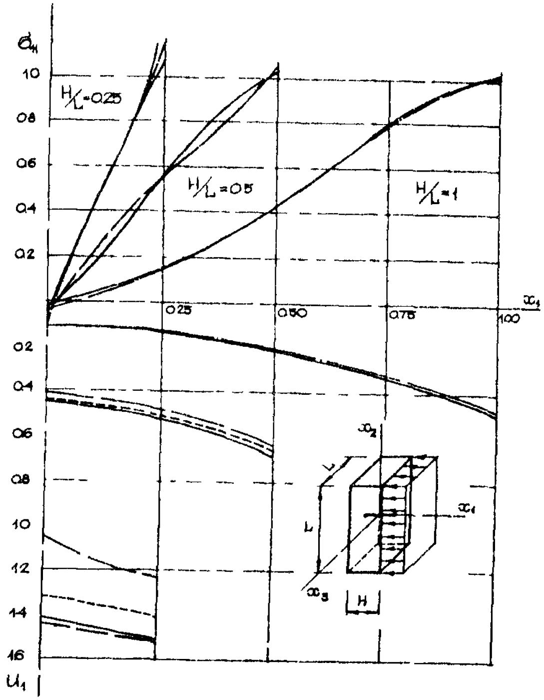


Рис. 4.3. Напряжение σ_{11} и перемещение u_1 в толстой пластине при $x_2 - x_3 = 0$

Из них следует, что для H/L = 1,0 и 0,5 достаточно шести фрагментов по толщине пластины, а для H/L = 0,25 – восьми фрагментов. При этом значения перемещений u_1 при контрольном сгущении сетки (n = 8 при H/L = 1,0 и 0,5 и n = 10 при H/L = 0,25) отличаются от предыдущих в пределах ~ 2%. Сходимость напряжений σ_{ii} ухудшается при приближении точек к граничной поверхности плиты, где особенно сильно ощущается погрешность кусочно-постоянной аппроксимации плотностей. Тем не менее напряжения σ_{11} совпадают в большинстве точек прямой для тех же значений параметра разбивочной сети n, что и перемещения u_1.

На рис. 4.4. изображены результаты решения граничной задачи в виде эпюр напряжений σ_{21} (сплошная линия) и σ_{22} (пунктирная линия) вдоль прямой $x_2 = L/2$, $x_3 = 0$. При H/L = I; 0,5 для приводимых результатов принято разбиение n = 6; при H/L = 0,25 n = I0. Необходимость использования более густой разбивочной сети при меньшей толщине пластины связана с увеличением градиентов напряжений при приближении к свободным граням (рис. 4.4).

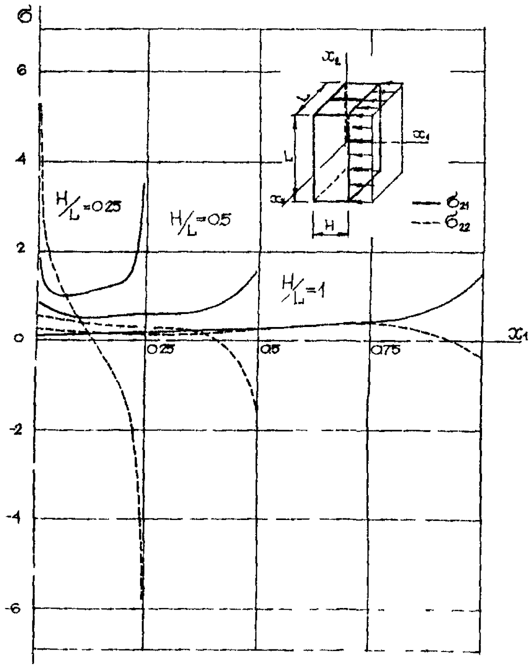


Рис. 4.4. Граничные напряжения σ_{21} и σ_{22} в толстой пластине при $x_2 = L/2, x_3 = 0$

4.I.4. При вычислении коэффициентов разрешающих систем с помощью соотношений разд. 3.4 различия между основными вариантами реализации практически несущественны. Для иллюстрации воз-

возможности использования интегральных уравнений с эластопотенциалами, содержащими компоненты как с особенностями низких порядков (простого и двойного слоя), так и с высокой степенью сингулярности, можно использовать задачу, где определялось напряженно-деформированное состояние квадратной пластины с единичной длиной стороны в условиях одноосного растяжения. Начало координат принималось в центре области, на сторонах задавались статические граничные условия при $x_1 = \pm 0{,}5$: $p_1 = \pm 1$, $p_2 = 0$; при $x_2 = \pm 0{,}5$: $p_1 = p_2 = 0$. Модуль упругости E – единичен; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$.

В первом варианте разрешающая система строилась из соотношений вида $u_i(K)$ в соответствии с (3.21, 6.1, 6.2). Часть характерных результатов расчета в виде перемещений точек 1 (0,5; 0,25) и 2 (0,25; 0,5) при разбивке каждой стороны на 6 и 18 участков представлена в табл. 4.1. Аналогично решалась обратная задача,

Таблица 4.1

t	$u_1(1)$	$u_2(1)$	$u_1(2)$	$u_2(2)$	$p_1(1)$	$p_2(1)$	$p_1(2)$	$p_2(2)$
6	0.503	-0.074	0.248	0.154	0.987	$1\ 10^{-3}$	$5\ 10^{-3}$	$1\ 10^{-5}$
18	0.501	-0.075	0.249	0.152	0.998	$8\ 10^{-5}$	$3\ 10^{-6}$	$1\ 10^{-5}$

где задавались кинематические граничные условия $u_1 = x_1 E^{-1}$, $u_2 = \nu x_1 E^{-1}$ и вычислялись реактивные усилия $p_i(1)$, $p_i(2)$.

В данном случае при определении дискретных неизвестных функциональные уравнения содержали эластопотенциалы, компоненты которых по граничным свойствам были не хуже потенциала двойного слоя, а алгебраическая система формировалась из аналогов уравнений Y_1 или Y_2. Полученные результаты свидетельствуют об одинаковой точности решения как первой, так и второй краевых задач.

Для сравнения приведенная задача при статических условиях на контуре Γ решалась также с помощью системы уравнений, построенной относительно неизвестных перемещений $u_i(N_t)$, $N_t \in \Gamma$ на основе соотношений $\sigma_{ij}(\kappa)$ (3.26), (3.27).

В табл. 4.2 даны значения величин $u_i(1)$, $u_i(2)$ при разбивке каждой стороны пластины на 6, 10 и 50 участков. В графах $u_i(\kappa)$ приведены результаты, полученные при образовании уравнений из интегральных представлений перемещений $u_i(\kappa)$, а в $\sigma_{ij}(\kappa)$ – напряжений. В обоих вариантах величины $\sigma_{11}(2)$, $\sigma_{22}(1)$ определялись по формулам (3.21), (см.6.4).

Таблица 4.2

Ω	N_t	$t=6$		$t=10$		$t=50$	
		$u_i(k)$	$\sigma_{ij}(k)$	$u_i(k)$	$\sigma_{ij}(k)$	$u_i(k)$	$\sigma_{ij}(k)$
u_1	2	0.2485	0.2518	0.2491	0.2514	0.2498	0.2503
	I	0.5035	0.5027	0.5021	0.5013	0.5004	0.5002
u_2	2	-0.1597	-0.1582	-0.1558	-0.1548	-0.1511	-0.1509
	I	-0.0743	-0.0780	-0.0746	-0.0773	-0.0749	-0.0750
σ_{11}	2	0.9870	1.0158	0.9921	1.0192	0.9983	1.0022
	I	1.0029	1.0000	1.0014	1.0000	1.0002	1.0000

Выполненный расчет имеет достаточно общий характер, поскольку при формировании разрешающих функциональных соотношений из представлений $u_i(\kappa)$ и $\sigma_{ij}(\kappa)$ используются практически все типы эластопотенциалов задач теории упругости. Как следует из табл. 4.2, точность вычисления неизвестных плотностей на основе различных рассмотренных подходов оказывается приблизительно одинаковой.

4.1.5. Все алгоритмы расчета составных объектов, реализованные в ППП "Потенциал", основаны на универсальной методике, предполагающей формирование разрешающих соотношений при расчленении объекта на отдельные элементы. Однако многообразие вариантов сопряжения различных инженерных конструкций заставляет учитывать при решении особенности постановки объединяемых типов граничных задач. Трудоемкость расчета во многом зависит от общего количества стыкуемых элементов, их конфигурации, взаимного расположения и вида контакта.

4.I.6. Во всех вариантах расчетов тел рассматриваемого класса алгоритмы имеют следующие характерные этапы. Сначала каждый выделенный элемент S_k подвергается дискретизации по границе $\Gamma_k + \Sigma \Gamma_{k,k+\varkappa}$ и в соответствии со схемой, представленной при описании методики расчета однородных объектов, формируются подсистемы алгебраических аналогов. Затем из условия неразрывности вводится тождественность усилий и перемещений, возникающих в рассматриваемых элементах по границе сопряжения. При этом учитывается перемещение в пространстве выделенного элемента как жесткого целого, что приводит к необходимости определения произвольных постоянных интегрирования. Полученные подсистемы объединяют в одну общую систему и, продолжая операции сочленения отдельных ступеней, производят дальнейшее ее укрупнение. Этот процесс заканчивается присоединением граничных элементов. Методика построения разрешающих соотношений не зависит от вида загружения и общих граничных условий задачи. Так как обычно каждый элемент S_k сопрягается с ограниченным числом соседних фрагментов $S_{k+\varkappa}$, то аппроксимирующая матрица получается не полностью заполненной и для рационального решения задачи применяются специальные способы формирования и решения системы уравнений.

4.I.7. Приведем характерный пример, позволяющий проанализировать некоторые особенности численного решения граничных задач составных объектов, воспользовавшись результатами расчета диска ступенчато-переменной жесткости, подверженного равномерному радиальному растяжению q по внешнему контуру (рис. 4.5). Внешнее кольцо жестко связывалось со вставкой - диском, что в общем случае характеризуется четырьмя компонентами напряженно-деформированного состояния. Наличие радиальной симметрии позволило исключить касательные неизвестные. Кольцо, материал которого характеризовался величинами E_k и ν_k, и вставка $(E_в, \nu_в)$ находились в условиях плоского напряженного состояния. Задача решалась с учетом двух плоскостей симметрии. Внешняя граница диска и фрагмент сопряжения аппроксимировались 18 прямолинейными участками, а фрагменты, ограничивающие четверть кольца и вставки в радиальном на-

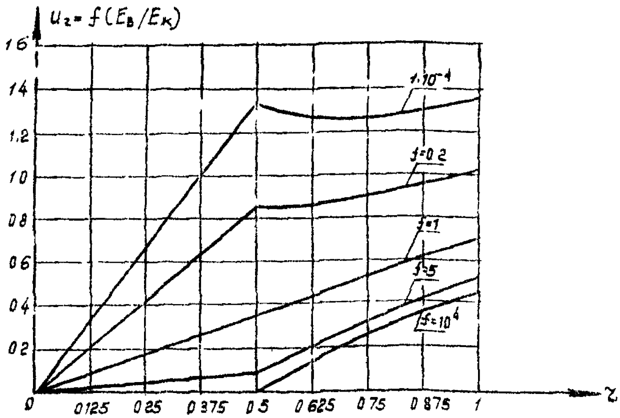


Рис. 4.5. Графики радиальных перемещений
в составной круговой пластине
при $E_к$ = I кПа, $\nu_к = \nu_в = 0.3$,
$E_в$ = I0000., 5., I., 0.2, 0.000I кПа

правлении, разбивались на 4 участка каждый. Неизвестными на внешней границе диска были нормальные перемещения, а на фрагменте сопряжения – нормальные напряжения и перемещения. На радиальных участках следовало определить лишь касательные перемещения. При решении на внешней границе кольца формировались девять уравнений, на радиальных фрагментах – по I6 уравнений. На участках раздела одно уравнение формировалось при направлении нормали внутрь вставки с учетом физико-механических характеристик кольца, второе – при обратном направлении нормали для вставки. Задавшись кусочно-постоянной аппроксимацией плотностей, на основе формулы Сомилиана получили:

$$\Omega_{me}^{(\alpha)}(K)=\sum_{i=1}^{9}[P_1^{(n)}(N_i)\int_{\Gamma_1}\Omega_{me}^{(\alpha)}u_1^{(n)*}(K,N)d\Gamma+q\int_{\Gamma_2}\Omega_{me}^{(\alpha)}u_1^{(n)*}(K,N)d\Gamma-$$

$$-u_1^{(n)}(N_i)\int_{\Gamma_1,\Gamma_2}\Omega_{me}^{(\alpha)}P_1^{(n)*}(K,N)d\Gamma]-$$

$$-\sum_{i=1}^{4}u_2^{(n)}(N_i)\int_{\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5,\Gamma_6}\Omega_{me}^{(\alpha)}P_2^{(n)*}(K,N)d\Gamma. \qquad (4.4)$$

Алгебраические системы (4.4) формировались и решались при $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$ и различных соотношениях модулей упругости E_2/E_1.

На рис. 4.5, 4.6 показаны графики изменения радиальных напряжений и перемещений при некоторых значениях функций $f = E_в/E_к$. Полученные результаты сравнивались с известными аналитическими решениями. При E_2/E_1 = 10000 (практически абсолютно жесткая вставка) невязка в перемещениях не превышала 1%, в напряжениях – 2%. При E_2/E_1 = 0,01 (диск с отверстием) невязка составляла 0,3%. Кольцевые напряжения (рис. 4.7) в диске-вставке изменяются аналогично σ_z, а в кольце понижаются. На линии сопряжения кольца и вставки напряжения σ_θ претерпевают разрыв, величина которого при f = 10000, достигает значения $\Delta\sigma_\theta$ = 0,94902 Па, а при f = 0,0001 (диск с отверстием) равна $\Delta\sigma_\theta$ = 2,66656 Па.

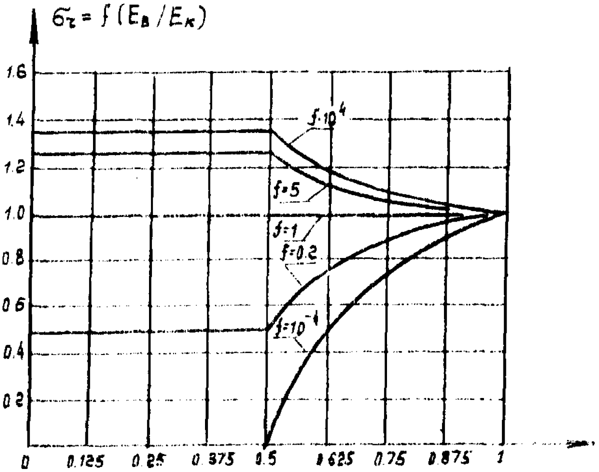


Рис. 4.6. Графики радиальных напряжений в составной круговой пластине при $E_к$ = 1 кПа, $\nu_к = \nu_в = 0{,}3$, $E_в$ = 10000., 5., 1., 0.2, 0.0001 кПа

Аналогично анализировались результаты при $E_в/E_к$ = ..., $0 \le \nu_в \le 0{,}5$ (рис. 4.8).

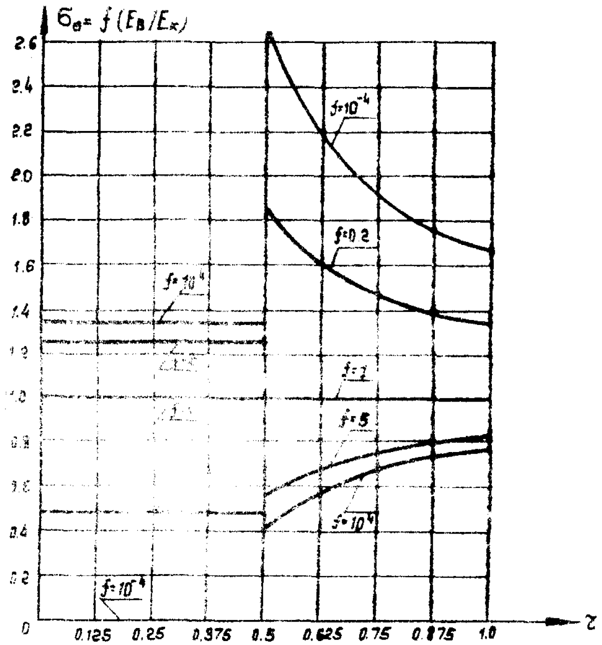


Рис. 4.7. Графики кольцевых напряжений в составной круговой пластине при $E_к$ = I кПа, $\nu_к = \nu_в = 0.3$, $E_в$ = 0,000I, 0.2, I., 5., 10000. кПа

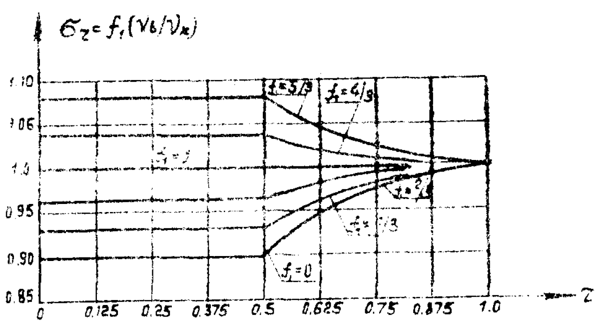


Рис. 4.8. Графики радиальных напряжений в составной круговой пластине при $\nu_в$ = 0., 0.I,0.2, 0.3, 0.4

4.2. Определение напряженно-деформированного состояния во внутренних точках области

4.2.1. Компоненты, характеризующие исследуемое напряженно-деформируемое состояние по произвольному множеству точек $K \in S$, дискретно вычисляются на основе операторных формул (3.21). При этом обычно для полноты расчета требуется определить характерные величины не только в сечениях $K_i \in \Gamma$, но и найти дополнительные компоненты в рассматриваемых при решении первого этапа задачи точках K_i и $K_{ij} \in \Gamma$. В частности, для исследования концентрации напряжений в трехмерных телах наибольший интерес представляют значения $\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{12}$ по площадкам, выходящим непосредственно на границу $(K_i \in \Gamma)$. Точность выполнения второго этапа расчета зависит от методики определения неизвестных дискретных граничных значений плотностей. Некоторые характерные аспекты анализа возможных результатов иллюстрируем следующими примерами.

4.2.2. Для оценки влияния замены криволинейной поверхности многогранниками с различной степенью приближения к Γ рассмотрим задачу о действии внутреннего (рис. 4.9) и внешнего (рис. 4.10) нормального давления q на сферический слой. Радиус полости Γ_1 равен половине радиуса R внешней сферы Γ_2. Расчетный фрагмент – восьмая часть тела, ограниченная координатными плоскостями $x_i = 0$, на которых задавались условия симметрии: $u_1 = 0, p_2 = p_3 = 0$. Каждый выделенный сферический фрагмент аппроксимировался набором из 16 (первый вариант) или 64 (второй вариант) плоских треугольников, разбивочная сеть которых строилась по аналогии с рис. 4.2. На поверхностях Γ_3, образованных сечениями $x_i = 0$, задавались 4 элемента по радиальной или 4 (или 8) по кольцевой координатам. Компоненты тензора напряжений после первого этапа решения граничной задачи при кусочно-постоянной аппроксимации плотностей определялись на основе реализации соотношений (3.21)

$$\sigma_{ke}(K) = \sum_{t=1}^{c_1} \Big[p_1(N_t) \int_{\Gamma_3^t} \sigma_{ke}^{(\alpha)} u_1^{(n)*}(K,N)\, d\Gamma -$$

$$- u_m(N_t) \int_{\Gamma_3^t} \sigma_{ke}^{(\alpha)} p_m^{(n)*}(K,N)\, d\Gamma \Big] -$$

$$-\sum_{t=C_1+1}^{C_2+C_3} u_i(N_t)\int_{(\Gamma_2+\Gamma_3)^t} \sigma_{ke}^{(\alpha)} p_i^{(n)*}(K,N)\,d\Gamma +$$

$$+q\sum_{\substack{t=C_1+1\\(t=C_2+1)}}^{C_2(C_3)} \int_{\Gamma_2^t(\Gamma_3^t)} \sigma_{ke}^{(\alpha)} u_1^{(n)*}(K,N)\,d\Gamma .$$

$$m=2,3\ ;\quad i=1,2,3 \qquad (4.5)$$

Здесь C_1, C_2, C_3 – номера последних элементарных плоских граничных фрагментов, принадлежащих соответственно Γ_1, Γ_2, Γ_3.

Нормальные напряжения σ_r и σ_θ (рис. 4.9, 4.10) определялись в сечениях $K \in S$ на луче, проведенном из центра координат и пересекающем поверхность Γ_2 в точке со сферическими координатами $r=R$, $\varphi=\theta=\pi/4$. Такой выбор обусловлен расположением центров аппроксимаций на многограннике, заменяющем Γ. Полученные числовые результаты сравнивались с известным аналитическим решением

$$\sigma_r = 1.143\, r^{-3}[0.125 q_2 \cdot (r^3 - R^3) + q_1 (0.125 R^3 - r^3)]$$
$$\sigma_\theta = 0.5714\, r^{-3}[0.125 q_2 (2r^3 + R^3) - q_1 (2r^3 + 0.125 R^3)] \qquad (4.6)$$

На рис. 4.9, 4.10 точные значения σ_r и σ_θ показаны сплошной и штрихпунктирной линиями. Обозначения • и ▲ соответствуют величинам σ_r при разбивке базисного сферического фрагмента соответственно на 16 и 64 плоских треугольника, а + и ■ аналогичным σ_θ. На Γ_1 и Γ_2 расхождения не превышают 3% для 16 и 0,5% для 64 треугольников. В приграничных зонах невязка несколько увеличивается (6% при 16 и 2% при 64 треугольниках). Отсюда следует, что даже сравнительно грубая аппроксимация границы обеспечивает достаточно высокую точность результатов решения.

4.2.3. При оценке целесообразности выбора какого-либо варианта алгебраического аналога интегральных уравнений с различными свойствами необходимо учитывать не только их влияние на точность определения граничных плотностей, но и на вычисление компонентов во внутренних точках области (особенно в тех случаях, когда исследуются напряженно-деформированные состояния, характеризующиеся высокими градиентами вблизи границы).

4.2.4. Рассмотрим решение задачи Кирша [15].

Окружность аппроксимируется вписанным правильным многоугольником ($^{\prime}$= 18, 34, 62), нагрузка прикладывается на расстоянии 20 R. При построении разрешающих уравнений

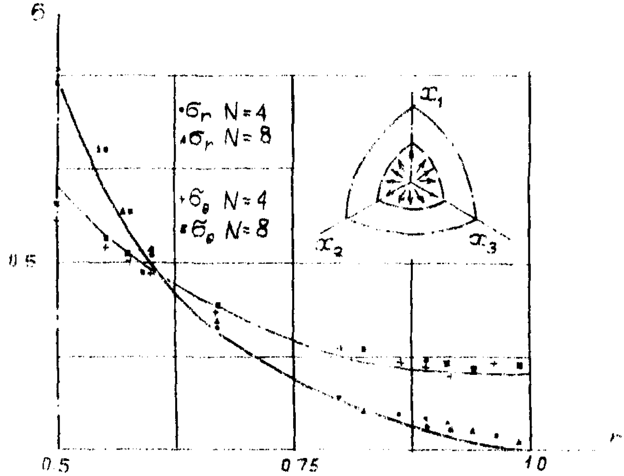
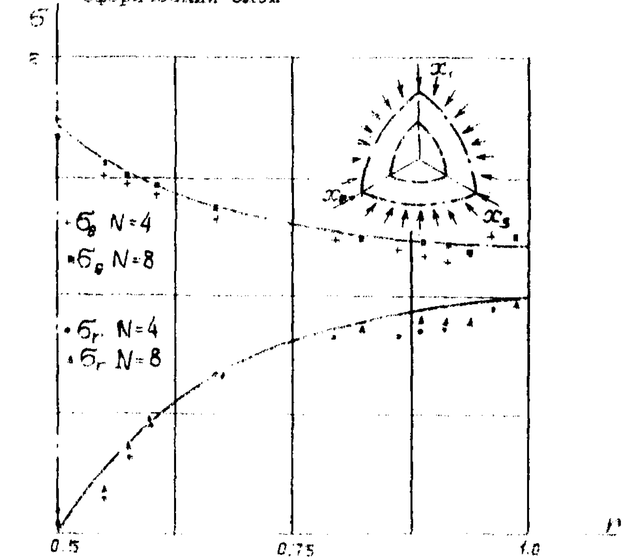


Рис. 1.9. Действие внутреннего давления на сферический слой



1.10. Действие внешнего давления на сферический слой на основе представлений $u_m(K)$ и применения кусочно-постоянной аппроксимации плотностей получим

$$u_m^{(\alpha)}(K)=\sum_{t=1}^{c_1}\Big[p_i^{(n)}(N_t)\int_{\Gamma^t}u_m^{(\alpha)}u_i^{(n)*}(K,N)\,d\Gamma-$$

$$-u_i^{(n)}(N_t)\int_{\Gamma^t}u_m^{(\alpha)}p_i^{(n)*}(K,N)\,d\Gamma\Big]. \qquad (4.7)$$

Во втором варианте неизвестные величины на границе будем вычислять, используя интегральные представления напряжений

$$\sigma_{1m}^{(\alpha)}(K)=\sum_{t=1}^{c_1}\Big[p_i^{(n)}(N_t)\int_{\Gamma^t}\sigma_{1m}^{(\alpha)}u_i^{(n)*}(K,N)\,d\Gamma-$$

$$-u_i^{(n)}(N_t)\int_{\Gamma^t}\sigma_{1m}^{(\alpha)}p_i^{(n)*}(K,N)\,d\Gamma\Big]. \qquad (4.8)$$

Результаты вычисления напряжений сравним с известным аналитическим решением

$$\sigma_{11}(r)=0{,}5\,(2+r^2R^{-2}+3r^4R^{-4}); \qquad (4.9)$$

$$\sigma_{22}(r)=1.5\,r^2R^{-2}(r^2R^2-1).$$

Из анализа табл. 4.3, где представлены значения σ_{11} и σ_{22} на границе отверстия $(r=R)$ и во внутренних точках ($r=$ $=1{,}2R$; $1{,}5R$; $2{,}0R$), можно сделать вывод, что в обоих вариантах решения при увеличении t величины $\sigma_{11}(r)$ стремятся к точным значениям. В частности, на границе отверстия ($r=R$, $\sigma_{11}(R)=3$) погрешность не превышает 10% при $t=18$ и составляет менее 1% при $t=62$. При определении неизвестных граничных плотностей с помощью уравнений $u_i(K)$ на контуре отверстия $\sigma_{22}(R)\neq 0$, что искажает значения $\sigma_{22}(r)=0$ и в других точках. Во втором варианте решения $\sigma_{22}(R)=0$ и поэтому $\sigma_{22}(r)$ находится точнее, чем в первом случае.

Таблица 4.3

σ_{ij}	r	t = 18		t = 32		t = 62	
		$u_i(K)$	$\sigma_{ij}(K)$	$u_i(K)$	$\sigma_{ij}(K)$	$u_i(K)$	$\sigma_{ij}(K)$
σ_{11}	1.0	2.8241	2.7132	2.9543	2.9114	2.9741	2.9688
	1.2	2.1674	2.2391	2.1426	2.1965	2.1351	2.1802
	1.5	1.5562	1.6003	1.5563	1.5932	1.5562	1.5710
	2.0	1.2296	1.2580	1.2306	1.2551	1.2301	1.2528
[illegible]	1.0	0.2341	0.0000	0.1961	0.0000	0.1683	0.0000
	1.2	0.2297	0.2309	0.3833	0.2937	0.3833	0.3229
	1.5	0.4232	0.3703	0.4386	0.3945	0.4432	0.4010
	[illegible]	0.3381	0.3114	0.3456	0.3214	0.3433	0.3262

4.3. Исходные данные и вывод получаемых результатов

4.3.1. В ППП "Потенциал" различаются два уровня информации, описывающей объект исследования.

4.3.2. На первом из них – входном – данные представляются в компактном виде, наиболее удобном при подготовке пользователем условия решаемой задачи. Они могут быть условно разделены на три группы:

1) данные, описывающие границу области и нагрузки;
2) физико-механические характеристики материала;
3) координаты точек внутри области, занимаемой объектом.

Перечень входных данных приведен в табл. 4.4. Информации первых двух групп достаточно для решения граничной задачи. Для построения полей компонентов напряженно-деформированных состояний во внутренних точках объекта необходим полный набор входных данных, включающий все три группы.

Таблица 4.4

Номер	Идентификатор	Тип	Размерность	Назначение	Примечание
I	2	3	4	5	6
I	NFRAG	INTEGER		Количество базисных фрагментов границы области	
I	KS	"		Признак симметрии области, занимаемой объектом	
I	NBH	"		Количество вариантов нагружений объекта внешней граничной нагрузки	
I	NTEL**)	"		Количество стыкуемых элементов	
II	E	REAL		Значения модуля упругости	
II	V	"		Значение коэффициента Пуассона	
I	A	"	(NPR, NPRIZ)	Матрица координат базисных фрагментов	NPR количество плоских элементов границы: NPRIZ = 8 NPRIZ = 5 MPR = 9**) NPR = 7*) MR = 3**) MR = 2*) NQ – количество нагруженных плоских элементов границы
I	JA	INTEGER	(NPR, MPR)	Матрица (поле) признаков	
I	PQ	REAL	(MR, NQ, NBN)	Матрица (поле) граничных нагрузок	
I	IPRNT	INTEGER	(20)	Настройка алгоритма на режим выдачи результатов	
III	MPMAX	"		Количество полей внутренних точек	
III	NNN	"	([illegible])	Начальные номера элементов границы	
III	[illegible]	"	([illegible])	Конечные номера элементов границы	

Окончание табл. 4.4

I	2	3	4	5	6
Ш	EPS	"	(11)	Величина отхода по нормали внутрь исследуемого объекта от центральных точек граничных плоских фрагментов	
Ш	KSET **)	INTEGER		Количество обращений к сервисным подпрограммам вычисления координат внутренних точек	
Ш	ST **)	REAL	(900)	Массив параметров для вызова сервисных подпрограмм	
Ш	JP **)	INTEGER	(1800)	Массив признаков принадлежности точек тому или иному элементу составного объекта	
II	XMAS YMAS **)	REAL	(20)	Массивы объемных нагрузок для каждой подобласти исследуемого объекта	

*) Задается при расчете трехмерных объектов.

**) Задается при расчете составных объектов.

4.3.3. При переходе ко второму уровню – оперативному осуществляется преобразование входных данных к виду, в котором они непосредственно используются в работе пакета прикладных программ. На этом уровне происходит переход от исследуемого объекта к дискретной модели. Информация, необходимая для описания последней, носит название оперативной и ее объем значительно превышает количество входных данных.

4.3.4. Входные данные о границе области и нагрузках представлены в виде трех матриц (геометрии, признаков и нагрузки) и некоторого количества переменных, задающих общие предельные характеристики дискретной модели.

4.3.5. Для задания параметров первой группы в ППП "Потенциал" принят пофрагментный способ описания границы исследуемого объекта. Последняя рассматривается как совокупность фрагментов канонических поверхностей (базисных фрагментов), в пределах которых постоянны граничные условия и закон изменения внешней граничной нагрузки. Количество таких фрагментов определяется переменной

$NFRAG$ (табл. 4.4), а их параметры заносятся в поле координат A по строкам. Одновременно в поле признаков JA для каждого базисного фрагмента вводится информация о типе геометрической поверхности, параметрах дискретизации при аппроксимации плоскими четырехугольными или треугольными элементами, граничных условиях и видах нагружений, а в поле нагрузок PQ – величины граничных нагрузок. Эти параметры служат исходными данными для ветви, осуществляющей переработку входной информации в оперативную. Состав сервисных модулей, структура данных и порядок их занесения подробно описаны в [7].

4.3.6. Значения физико-механических характеристик материала (модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν) присваиваются одноименным переменным (табл. 4.4) и приняты постоянными в пределах одной подобласти. При рассмотрении составных объектов эти данные заносятся в массивы $E1$ и $NU1$, каждое i-е значение которых соответствует физико-механическим характеристикам i-й подобласти.

4.3.7. Данные третьей группы могут быть представлены двумя различными способами. В первом из них задается диапазон номеров неискривленных элементов, аппроксимирующих реальную граничную поверхность, и значение ε, определяющее величину сдвига центральной точки граничного элемента внутрь исследуемого объекта от его границы. Точки с одинаковым значением параметра ε топологически объединяются в поле, номер которого ℓ служит для выбора нужного значения параметров из массивов NNN, NNK и EPS (табл. 4.4).

Второй способ предусматривает использование сервисных подпрограмм для вычисления координат внутренних точек. Количество обращений к таким подпрограммам $(ASET)$ и необходимые параметры для них (массив ST) задаются пользователем. Как вспомогательный предусмотрен вариант ввода информации третьей группы непосредственно с перфокарт.

4.3.8. Получаемые в процессе решения задач результаты выдаются на алфавитно-цифровое печатающее устройство (АЦПУ) и при необходимости накапливаются на магнитном диске.

4.3.9. Выходная информация, выдаваемая на АЦПУ в процессе работы ППП, может быть условно разбита на две группы:

информация, помогающая контролировать правильность подготовки входных данных;

выходные данные, являющиеся результатами расчета напряженно-деформированных состояний исследуемого объекта.

4.3.10. Для контроля подготовки входных данных на АЦПУ выводятся образцы перфокарт с входной информацией. Это происходит либо при обнаружении программой ввода ошибки во входных данных, либо при задании признака распечатки ($IFPULT(2)=1$).

Если $IFPULT(1)=1$, то на АЦПУ полностью выводится вся оперативная информация в виде таблиц, содержащих поля координат, признаков и нагрузок для плоских элементов граничной поверхности. Полную распечатку оперативной информации рекомендуется выполнять при отладочных постановках задачи, так как это связано со значительным расходом бумажной ленты для АЦПУ.

Если $IFPULT(1)=IFPULT(2)=\emptyset$, то на АЦПУ выводится только сообщение: "ГЕОМЕТРИЯ ГРАНИЦЫ".

В следующей строке листинга указывается общее число элементарных плоских фрагментов и значение признака симметрии.

4.3.11. Результаты решения граничной задачи выводятся на АЦПУ в виде таблицы под общим заголовком "РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ". Далее для каждого плоского элемента границы в строке таблицы распечатываются значения координат центральной точки фрагмента, а также компонент векторов перемещений и усилий в местной координатной системе m. Затем для каждого поля внутренних точек выдаются его номер, поле координат и направляющие косинусы оси X_1 в глобальной координатной системе.

Компоненты НДС на АЦПУ выводятся в виде групп по 12 точек, расположенных в четырех таблицах. Первая из них содержит компоненты вектора перемещений, вторая и третья - компоненты тензора напряжений. В четвертой таблице сведены значения главных напряжений в каждой точке.

После построения компонент НДС для всех точек очередного поля на АЦПУ выдаются максимальное главное и октаэдрическое напряжения, позволяющие определить наиболее напряженное место в рассматриваемой конструкции при заданном варианте внешних воздействий.

5. ПАКЕТЫ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ "ПОТЕНЦИАЛ" И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ

5.I. Пояснительная записка

5.I.I. Основание для разработки - Программа комплексной стандартизации по научно-технической проблеме "Расчеты и испытания на прочность" на 1986-1990 гг.

5.I.2. Краткая характеристика предлагаемого метода, сведения о его эффективности, точности, универсальности, возможности автоматизации всех этапов расчета; обоснование преимуществ, границ применения в рекомендуемой области распространения, а также нормативные и литературные источники приведены в настоящей работе и в [I-I8].

5.I.2.I. Универсальная структура подготовки данных для ввода исходной информации и форма представления результатов расчета по данному методу позволяют в минимальные сроки подготовить специалистов для эксплуатации ППП "Потенциал", использующего стандартное системное математическое обеспечение.

5.I.2.2. Последовательность решения конкретных задач, независимо от области применения ППП; требования к квалификации работников:

5.I.2.2.I. Конструктивная постановка задачи. Инженер-проектировщик определяет конструкции или их элементы, для которых выполняются расчеты. Подготавливает фрагменты рабочих чертежей, определяющих геометрические параметры исследуемого объекта, расчетные характеристики материалов конструкций и данные о внешних нагрузках. Специальная подготовка может быть ограничена общими сведениями о возможностях ППП "Потенциал" и кругом решаемых задач.

5.I.2.2.2. Постановка задачи и выбор дискретной схемы. Инженер-расчетчик подготавливает расчетную схему объекта, отвечающую целям исследования, с учетом возможности ППП и мощности ЭВМ. При этом обязательно изучение документации, сопровождающей ППП "Потенциал" ("Описание программы", "Руководство программиста"). Для специальной подготовки требуется приблизительно неделя и некоторый опыт практической работы, который может быть приобретен в процессе освоения ППП.

5.I.2.2.3. Подготовка исходных данных в соответствии с заданной расчетной схемой может выполняться работником, имеющим квалификацию техника-программиста. Он обеспечивает пуск задачи и получение результатов ее решения. Для специальной подготовки требуется овладение навыками, полученными при изучении "Руководства программиста" в течение I-2 дней.

5.I.2.2.4. Представление результатов - по форме на листинге ("Руководство программиста").

5.I.2.2.5. Повторные исследования, выполняемые при варьировании параметров расчетных схем, нетрудоемки по сравнению с первичным расчетом; поскольку соответствующая корректировка исходной информации требует незначительных изменений.

5.2. Программная документация и контрольные примеры

Программная документация на ППП "Потенциал-2" и "Потенциал-3" разработана и сдана во Всесоюзный научно-технический информационный центр (инвентарные номера № 02840028549 и № 02840056552). В настоящих рекомендациях представлены описание программы и формуляр, содержащие наиболее полные и общие сведения о возможностях ППП, условия их эксплуатации, применения, передачи и т.п.

5.2.I. Описание программы.

5.2.I.I. ППП "Потенциал" написаны на алгоритмическом языке Фортран-IУ, используют стандартное математическое обеспечение операционной системы ОС ЕС, версии 4,I, 6.I и базируются на ЭВМ серии ЕС. Минимальный объем оперативной памяти 512 Кбайт, объем накопителей на магнитных дисках не менее 7,5 Мбайт.

ППП "Потенциал" существуют в виде библиотеки объектных и загрузочных модулей, которые хранятся на томе прямого доступа. Для транспортировки ППП используется магнитная лента. Копирование библиотечных наборов осуществляется утилитой IEHMOVE операционной системы ОС ЕС.

5.2.I.2. Функциональное назначение. ППП "Потенциал" предназначен для решения на ЕС ЭВМ задач статики сложных пространственных конструкций с учетом различных внешних воздействий. Объектами исследований являются конструкции, напряженно-деформированное состояние которых с достаточной инженерной точностью моделирует решение трехмерной задачи механики твердых деформируемых тел при варьировании основных параметров расчетных схем. Используются следующие типы моделей: I) массивные тела, которые могут опираться на упругое основание при любом значении коэффициента постели; 2) объекты, составленные из пластинчатых элементов, расположенных в общем случае в разных плоскостях, при различных вариантах сопряжения по сложным кривым. Области могут ограничиваться произвольными криволинейными поверхностями и иметь ослабления в виде полостей и тонких разрезов. Между отдельными элементами конструкции допускаются наиболее распространенные виды контакта: идеальное жесткое соединение; передача усилий лишь в одном направлении; полное отсутствие связи; различные комбинации смешанных условий сопряжения.

5.2.I.3. Описание логической структуры. Пакеты прикладных программ "Потенциал" для решения составных двумерных и трехмерных объектов имеют единую структуру (рис. 5.I). Они состоят из блоков: исходной информации DANO, решения граничной задачи BUG, построения полей компонент напряженно-деформированных состояний во внутренних точках BUV и сервисных программ SERVIS.

В блоке исходной информации DANO осуществляются ввод и первичная обработка данных о дискретной схеме исследуемого объекта, его геометрических и физических параметрах, а также о действующих на объект нагрузках. Эти данные заносятся в три матрицы: поле координат A, поле признаков JA и поле нагрузок PQ (см. разд. 4.3).

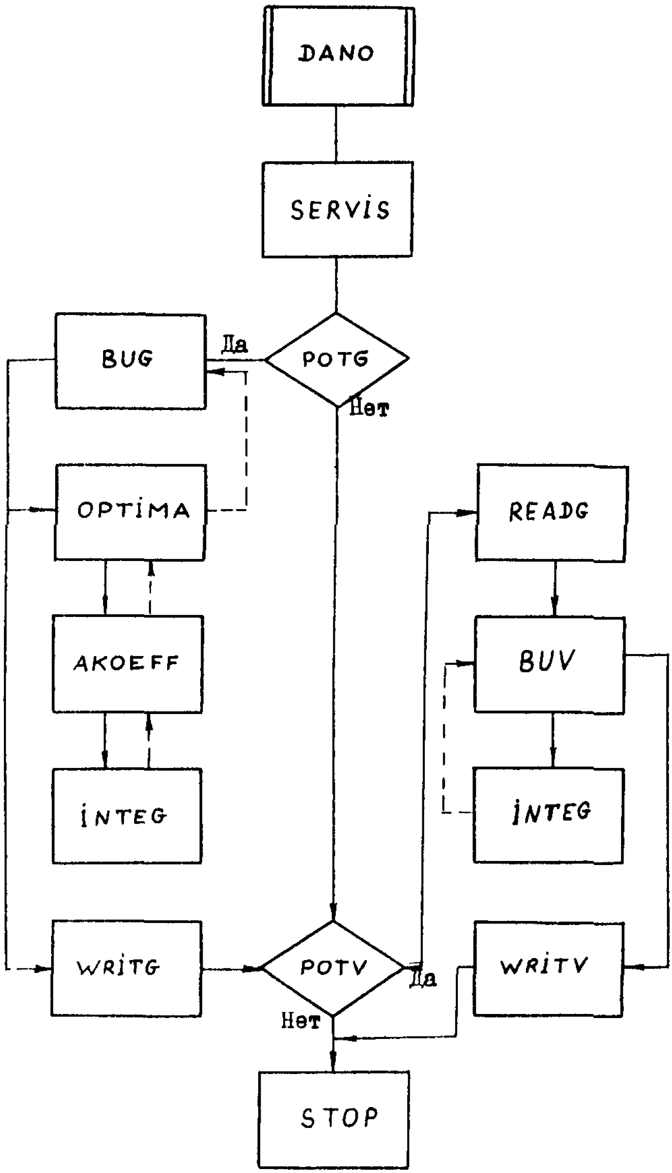


Рис. 5.I. Укрупненная схема ППП "Потенциал"

На начальном этапе вычислительного процесса осуществляется первичная обработка исходной информации к виду, используемому на оперативном уровне. На основе данных о базовых геометрических фрагментах и параметрах дискретизации вычисляются и заносятся в поле геометрии координаты неискривленных элементарных фрагментов. Параллельно перерабатываются поля признаков JA и нагрузок PQ, так как между ними и полем координат должно существовать взаимно однозначное соответствие. Для хранения массивов информации используются как оперативная память ЭВМ, так и внешние запоминающие устройства (ВЗУ). Модули, осуществляющие первичную обработку информации, входят в блок $SERVIS$. Сюда же включены программы, осуществляющие контроль правильности исходных данных. При обнаружении ошибочных параметров на печатающие устройства ЭВМ выдается диагностическое сообщение и выполнение программы прекращается.

Блок решения граничной задачи BYG вызывается при значении логической переменной $POTG = TRUE$. и состоит из модуля решения системы алгебраических уравнений $OPTIMA$, управляющей программы формирования коэффициентов системы и правых частей $AKOEFF$, а также блока вычисления коэффициентов для одного элементарного фрагмента граничной поверхности $INTEG$. Необходимый тип вспомогательного состояния выбирается автоматически.

Для решения системы уравнений в ППП используется программа $OPTIMA$, реализующая блочный метод Гаусса для полностью заполненных матриц. Метод требует генерации по номерам столбца i и строки j любого коэффициента алгебраической системы уравнений. Для удовлетворения этого требования в управляющей программе формирования коэффициентов использован принцип опережающего шаблона, заключающийся в вычислении некоторого количества коэффициентов клеточной строки (шаблона) до того, как они будут "затребованы" программой решения системы уравнений. Командой на формирование очередного шаблона служит запрос коэффициента, выходящего за рамки предыдущего шаблона. Таким образом, программа решения фактически управляет формированием системы алгебраических уравнений.

Следует отметить, что в блоке формирования реализована возможность генерации разрешающих систем алгебраических уравнений с помощью интегральных представлений как перемещений, так и напряжений.

Блок вычисления коэффициентов INTEG для одного элементарного фрагмента граничной поверхности реализует матричный алгоритм, предусматривающий вычисление базисных интегралов в местной системе координат с последующим их перемножением на направляющие косинусы. При вычислении коэффициентов используются замкнутые аналитические формулы, значительно сокращающие время загрузки центрального процессора ЭВМ по сравнению с численным интегрированием. Данный алгоритм прост при реализации на ЭВМ и позволяет легко контролировать промежуточные результаты при его отладке.

Результаты решения граничной задачи выводятся на алфавитно-печатающее устройство (АЦПУ) в табличной форме и записываются на ВЗУ для долговременного хранения (WRITG). Одновременно с этим может вычисляться и выводиться на печать нормальная составляющая тензора напряжений, ориентированная вдоль касательной к участку контура, что позволяет исследовать задачи о концентрации напряжений.

Блок вычисления компонентов напряженно-деформированных состояний во внутренних точках состоит из управляющего модуля BUY и блока формирования коэффициентов для одного элемента границы, используемого и при решении граничной задачи. Дополнительной информацией для этого блока служат координаты точек, в которых вычисляются компоненты U_i и σ_{ij}. Кроме этих величин вычисляются также значения главных напряжений в каждой точке и максимальное октаэдрическое напряжение для групп точек, которые позволяют сделать вывод о прочностных характеристиках рассчитываемого объекта.

По значениям напряжений в определенных сечениях могут быть найдены продольные и поперечные силы, а также изгибающие моменты, которые используются как исходные данные для блока армирования.

Для вывода промежуточных результатов счета, дополнительной информации и для управления процессом решения задачи в ППП "Потенциал" используется ряд логических переменных.

Результаты расчета могут выдаваться на АЦПУ в виде таблиц или записываться на ВЗУ для последующей обработки с помощью пакетов графических программ на графопостроителях или графических дисплеях.

5.2.2. Формуляр.

5.2.2.I. Общие сведения. Пакеты прикладных программ "Потенциал-2" и "Потенциал-3" разработаны в Киевском инженерно-строительном институте. Они оформлены в виде библиотек исходных (SYS2.TEXT.TAVR и SYS2.TEXT.VINA) и объектных

(SYS2.LOAD.TAVR и SYS2.LOAD.VINK) модулей. Каждая подпрограмма оформлена в виде отдельного раздела. В библиотеках объектных модулей содержатся также в виде разделов загрузочные модули каждого пакета.

5.2.2.2. Основные характеристики. Тип ЭВМ ЕС-1022 - ЕС-1060. Операционная система ОС ЕС, версии 4.1, 6.1.
Объем оперативной памяти для выполнения задания 250-300 К.
Тип машинного носителя магнитные ленты, диски.
Язык программирования Фортран-IV.
Основной режим работы пакетный.
Входное устройство перфокарточное устройство ввода.
Выходное устройство АЦПУ, МД.

Для транспортировки ППП используются магнитные ленты. Копирование библиотечных наборов данных осуществляется утилитой IEHMOVE операционной системы ОС ЕС.

5.3. Примеры расчета

5.3.1. ППП "Потенциал-2" и "Потенциал-3" использовались в различных отраслях техники для практических комплексных исследований ответственных конструкций в разнообразных режимах эксплуатации при многовариантном представлении объектов и комбинировании составных элементов. Реализация таких исследований требовала изменений в широком диапазоне постановки задачи в зависимости от назначения объекта, его характеристик и стадий проектирования.

На начальных этапах проектирования обычно выполнялась сравнительно нетрудоемкая, но достаточно обоснованная оценка эскизных вариантов с целью выявления влияния отдельных многочисленных параметров на прочность, долговечность, экономичность и другие характеристики конструкции. На заключительных этапах использовались пространственные расчетные схемы, которые с наибольшей полнотой моделировали принятый рабочий вариант конструкции.

Для примера на рис. 5.2-5.34 показана часть результатов исследований напряженно-деформированных состояний различных объектов техники, при проектировании которых были выявлены преимущества ППП "Потенциал" по сравнению с использованием других расчетных аппаратов.

5.3.2. В инженерной практике часто возникают большие затруднения при расчете составных объектов, элементы которых имеют сложную конфигурацию и смешанные условия сопряжения. Характерным примером конструкций машиностроения такого типа могут служить различные виды соединений лопаток и ободов турбин (рис. 5.2-5.5).

Очевидно, что достаточно точный расчет этой конструкции должен строго учитывать совместность работы лопатки и обода. С этой целью обычно делаются попытки применения достаточно апробированных численных сеточных методов. Однако использование МКЭ или других подобных аппаратов в этом случае из за сложности геометрии объекта и необычности его напряженно-деформированного состояния, характеризующегося резким и частым изменением градиентов, требует весьма подробной и нерегулярной дискретизации всей составной области. Подготовка такой исходной информации может превратиться в самостоятельную проблему, а трудоемкость расчета превысить возможность средств реализации. Поэтому в практике проектирования эти объекты рассчитываются, как правило, на основе расчленения составной конструкции на отдельные самостоятельные тела, в которых нагрузка на упорных кромках задается в результате специальных экспериментов или интуитивных соображений.

5.3.3. Покажем на примере, что применение ППП "Потенциал" для исследования таких составных объектов позволяет существенно сократить объем вводимой информации и упростить решение задачи при практически точной постановке. Для этого рассмотрим расчет соединения хвостовой части лопатки паровой турбины с ободом диска, показанного на рис. 5.2.

Значительная протяженность конструкции в окружном направлении позволяет представить ее работу в условиях плоской деформации. Центробежная сила от вращения лопатки рассматривается в виде равномерно распределенной нагрузки единичной интенсивности. Хвостовая часть диска (грибок) жестко защемлена по оси X_1 (фрагмент 7-8). Совместность работы элементов обеспечивается контактом на опорных кромках 12-13, 16-17, 20-21. На остальной линии раздела элементов отсутствуют напряжения. Модули упругости грибка и хвостовой части лопатки равны соответственно E_1 = 1800 МПа и E_2 = 2100 МПа, коэффициенты Пуассона одинаковы: ν = 0,3.

Вся граница объекта аппроксимировалась 231 прямолинейным элементом, внутри области было выбрано 1750 точек, в которых определялось напряженно-деформированное состояние. Информация о геометрии и нагрузке представлена в виде матриц в табл. 5.1 и 5.2. Исходные данные для описанной выше задачи показаны в табл. 5.3.

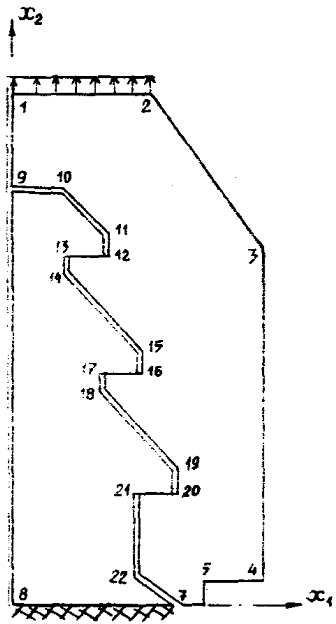


Рис. 5.2. Расчетная схема хвостового соединения

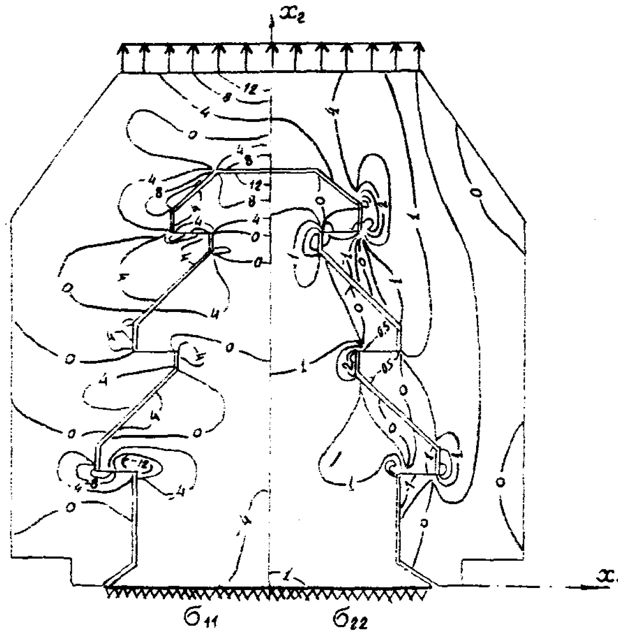


Рис. 5.3. Изолинии нормальных напряжений в хвостовом соединении

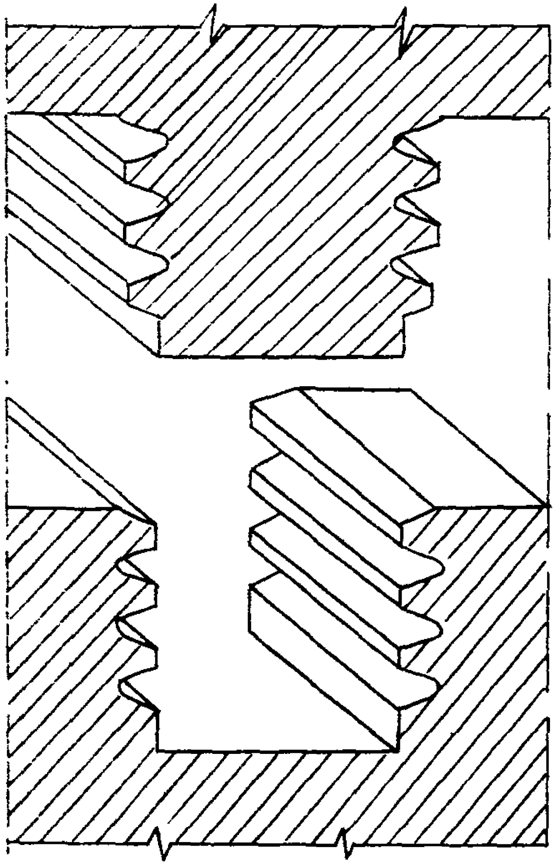


Рис. 5.4. Общий вид зубчикового хвостового соединения

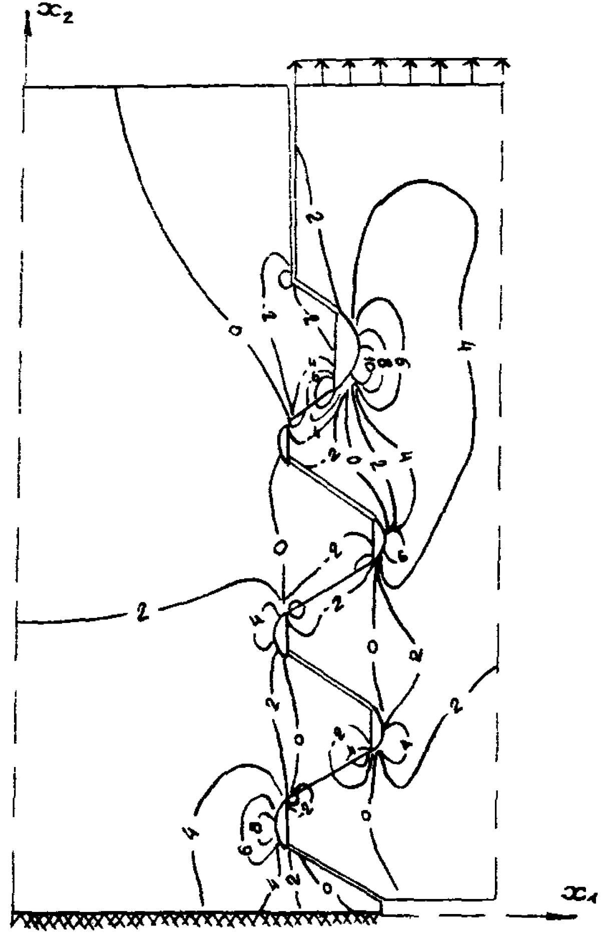


Рис. 5.5. Изолинии напряжений

Таблица 5.I

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ГРАНИЦЫ

ГЕОМЕТРИЯ ГРАНИЦЫ

1.0	0.0	0.10150E 02	0.39600E 01	0.10150E 02
1.0	0.29000E 01	0.10150E 02	0.80000E 01	0.71000E 01
1.0	0.38000E 01	0.71000E 01	0.80000E 01	0.30000E 01
1.0	0.80000E 01	0.50000E 01	0.38000E 01	0.50000E 01
1.0	0.38000E 01	0.50000E 01	0.18000E 01	0.0
1.0	0.38000E 01	0.0	0.33000E 01	0.0
1.0	0.33000E 01	0.0	0.0	0.0
1.0	0.0	0.0	0.0	0.81300E 01
1.0	0.0	0.81000E 01	0.0	0.10150E 02
1.0	0.0	0.81500E 01	0.10000E 01	0.81300E 01
1.0	0.10000E 01	0.81500E 01	0.18100E 01	0.74500E 01
1.0	0.18100E 01	0.74500E 01	0.18100E 01	0.69500E 01
1.0	0.18100E 01	0.69500E 01	0.10100E 02	0.69500E 01
1.0	0.10100E 01	0.69500E 01	0.10100E 02	0.65500E 01
1.0	0.10100E 01	0.65500E 01	0.84000E 01	0.81000E 01
1.0	0.26000E 01	0.51000E 01	0.26000E 01	0.46000E 01
1.0	0.26000E 01	0.46000E 01	0.17750E 01	0.46000E 01
1.0	0.17750E 01	0.46000E 01	0.17750E 01	0.42000E 01
1.0	0.17750E 01	0.42000E 01	0.33400E 01	0.27500E 01
1.0	0.33400E 01	0.27500E 01	0.33400E 01	0.22500E 01
1.0	0.33400E 01	0.22500E 01	0.23500E 01	0.22500E 01
1.0	0.23500E 01	0.22500E 01	0.23500E 01	0.45000E 00
1.0	0.23500E 01	0.45000E 00	0.31000E 01	0.0
1.0	0.33000E 01	0.0	0.23500E 01	0.45000E 00
1.0	0.23500E 01	0.45000E 00	0.23500E 01	0.22500E 01
1.0	0.33400E 01	0.22500E 01	0.33400E 01	0.27500E 01
1.0	0.33400E 01	0.27500E 01	0.17750E 01	0.42000E 01
1.0	0.17750E 01	0.42000E 01	0.26000E 01	0.46000E 01
1.0	0.26000E 01	0.46000E 01	0.26000E 01	0.51000E 01
1.0	0.26000E 01	0.51000E 01	0.10120E 02	0.69500E 01
1.0	0.18100E 01	0.69500E 01	0.10100E 02	0.69500E 01
1.0	0.18100E 01	0.69500E 01	0.18100E 01	0.74500E 01
1.0	0.18100E 01	0.74500E 01	0.10000E 01	0.81300E 01
1.0	0.10000E 01	0.81500E 01	0.0	0.81300E 01

Таблица 5.2

ПРИЗНАКИ								НАГРУЗКИ	
1	0	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	0	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	15	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	3	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	2	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	0	1	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	20	5	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	0	5	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	9	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	9	3	1	2	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	0	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	0	3	1	2	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	0	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	9	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	3	1	2	0	0	0.0	0.0	0.0
1	0	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	4	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	4	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	0	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	0	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	9	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	0	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	9	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0

Таблица 5.3

```
&GRAN N=34,N1=34,
A=34*1,10,,2,9,2*0,,2*3,8,5,3,3*0,,1,,2*1,81,2*1,01,
2*2,6,2*1,775,2*3,34,2*2,55,3,3,2,55,2*3,34,1,775,
2*2,6,1,01,2*1,81,1,,2*10,15,9,1,2*0,5,3*0,,3*0,15,
7,45,2*6,55,6,55,5,1,2*4,6,4,2,2,75,2*2,25,0,45,
0,,0,45,2,25,2,75,4,2,4,6,5,1,6,55,6,95,7,45,0,15,
2,9,2*5,,2*3,8,3,3,3*0,,1,,2*1,01,2*10,1,2*2,6,
2*1,775,2*3,34,2*2,55,3,3,2*2,55,3,34,1,775,2,6,
2,6,2*1,01,1,81,1,,0,,10,15,7,1,2*5,,3*0,,1
5,15,10,15,8,15,7,45,0,75,6,95,6,55,5,1,2*4,6,
4,2,2,75,2*2,25,0,45,0,,0,45,2,25,2,75,4,2,
4,6,5,1,6,55,6,95,7,45,2*8,15,
J=5*34*1,6,8,15,5,3,2,0,20,8,5*5,0,3*5,0,
2*5,0,4,4,8,5,0,5,0,0,4*5,6*0,1,5,5,
3*0,3,3*0,3,3*0,3,12*0,6*2,2*1,2,
14*1,11*2,17*0,2,3*0,2,3*0,7,
E1=1,0,2,1,IPLD=2*1,
SICT=,T,,&END
&STR N1=1750,KSET=1,
ST=1,,0,,05,,70,,*0,,101,*,0,,0,,&END
```

На рис. 5.3 показаны результаты расчета в виде изолиний нормальных напряжений. Для решения задачи на ЕС-1033 потребовалось 80 мин.

5.3.4. Аналогично исследовалось зубчиковое хвостовое соединение, имеющее гладкую границу зубьев (рис. 5.4). Модули упругости хвостовой части диска и обода одинаковы (E= 2100 МПа), коэффициенты Пуассона ν = 0,3. Центробежная сила от вращающейся лопатки передается в виде распределенной нагрузки q = -3,726 кПа. На участках контакта предполагалось отсутствие касательных напряжений. Матрицы геометрии, признаков и нагрузок даны в табл. 5.4 и 5.5, а исходные данные в табл. 5.6. Для решения граничной задачи сформирована и решена система 358 уравнений. Внутри области выбрано 1233 точки, по значениям напряжений в которых построены изолинии σ_{11} (рис. 5.5). Для решения этой задачи на ЕС-1033 потребовалось 52 мин.

5.3.5. В различных объектах машиностроения широко используются конструкции, изготовляемые из стыкуемых элементов, расположенных в разных плоскостях. Во многих случаях такие пластинчатые элементы из-за относительно небольшой толщины по сравнению с другими размерами характеризуются большой гибкостью, что позволяет описать их напряженно-деформированное состояние уравнениями плоской задачи теории упругости (т.е. учесть общую жесткость системы, пренебрегая изгибной жесткостью отдельных элементов).

5.3.6. Характерным примером такого объекта является широкополая двутавровая балка, лежащая на двух опорах и ослабленная в стенке отверстием (рис. 5.6). Полки и стенки двутавра представляют собой тонкие пластины δ_i, которые рассматриваются как отдельные элементы составной конструкции. Модуль упругости материала двутавра $E = 2.1\cdot10^3$ МПа, коэффициент Пуассона ν = 0,3.

Наличие симметрии балки относительно оси x_2 позволило рассмотреть лишь ее левую половину (рис. 5.7). Контуры двутавра, включая участки сопряжения, представлены 27 фрагментами. Матрицы геометрии признаков и нагрузок приведены в табл. 5.7, исходные данные - в табл. 5.8. Вблизи отверстия было выбрано 120 точек, в которых определялись все характерные компоненты напряженно-деформированного состояния. Рассматривались четыре положения квадратного отверстия, симметричного относительно оси x_1.

На рис. 5.8 показаны результаты расчета в виде изолиний наиболее характерных для этого случая напряжений σ_{22}, из которых

Таблица 5.4

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ГРАНИЦЫ

ГЕОМЕТРИЯ ГРАНИЦЫ

1.0	0.0	0.48000E 01	0.15600E 01	0.48000E 01
1.0	0.15600E 01	0.48000E 01	0.21000E 01	0.45300E 01
1.0	0.21000E 01	0.45300E 01	0.21000E 01	0.42400E 01
1.0	0.21000E 01	0.42400E 01	0.15600E 01	0.39700E 01
1.0	0.15600E 01	0.39700E 01	0.14000E 01	0.38700E 01
1.0	0.14000E 01	0.38700E 01	0.14800E 01	0.37700E 01
1.0	0.14800E 01	0.37700E 01	0.15600E 01	0.36800E 01
1.0	0.15600E 01	0.36800E 01	0.21000E 01	0.34100E 01
1.0	0.21000E 01	0.34100E 01	0.21000E 01	0.31200E 01
1.0	0.21000E 01	0.31200E 01	0.15600E 01	0.28500E 01
1.0	0.15600E 01	0.28500E 01	0.14000E 01	0.27300E 01
1.0	0.14800E 01	0.27500E 01	0.14800E 01	0.26300E 01
1.0	0.14800E 01	0.26500E 01	0.15600E 01	0.25400E 01
1.0	0.15600E 01	0.25400E 01	0.21000E 01	0.22900E 01
1.0	0.21000E 01	0.22900E 01	0.21000E 01	0.20000E 01
1.0	0.21000E 01	0.20000E 01	0.18300E 01	0.18300E 01
135.0	0.28142E 00	0.19377E 01	0.15900E 01	0.10000E 01
1.0	0.18300E 01	0.13300E 01	0.21000E 01	0.11000E 01
1.0	0.21000E 01	0.11000E 01	0.21000E 01	0.0
1.0	0.21000E 01	0.0	0.21000E 01	0.11000E 01
1.0	0.21000E 01	0.11000E 01	0.18300E 01	0.13300E 01
1.0	0.18300E 01	0.13300E 01	0.18300E 01	0.18300E 01
1.0	0.21000E 01	0.20000E 01	0.21000E 01	0.21000E 01
1.0	0.21000E 01	0.21000E 01	0.21000E 01	0.22000E 01
1.0	0.21000E 01	0.22000E 01	0.21000E 01	0.22900E 01
1.0	0.21000E 01	0.22900E 01	0.15600E 01	0.25600E 01
1.0	0.15600E 01	0.25600E 01	0.15600E 01	0.28500E 01
1.0	0.21000E 01	0.28500E 01	0.21000E 01	0.32200E 01
1.0	0.21000E 01	0.32200E 01	0.21000E 01	0.33200E 01
1.0	0.21000E 01	0.33200E 01	0.21000E 01	0.34100E 01
1.0	0.21000E 01	0.34100E 01	0.15600E 01	0.36800E 01
1.0	0.15600E 01	0.36800E 01	0.15600E 01	0.39700E 01
1.0	0.21000E 01	0.39700E 01	0.21000E 01	0.43400E 01
1.0	0.21000E 01	0.43400E 01	0.21000E 01	0.44400E 01
1.0	0.21000E 01	0.44400E 01	0.21000E 01	0.45300E 01
1.0	0.21000E 01	0.45300E 01	0.15600E 01	0.48000E 01
1.0	0.15600E 01	0.48000E 01	0.15600E 01	0.48000E 01
1.0	0.15000E 01	0.48000E 01	0.42000E 01	0.48000E 01
1.0	0.42000E 01	0.48000E 01	0.42000E 01	0.0
1.0	0.42000E 01	0.0	0.21000E 01	0.0
1.0	0.21000E 01	0.0	0.0	0.0
1.0	0.0	0.0	0.0	0.48000E 01

Таблица 5.5

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ГРАНИЦЫ

ПРИЗНАКИ							НАГРУЗКИ		
1	6	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	3	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	3	1	2	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	3	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	3	1	2	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	3	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	3	3	1	2	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	3	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	3	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	3	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	3	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	5	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	1	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	10	1	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	16	5	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	10	0	2	0	0	0	0.0	0.0	0.0
1	8	0	1	0	0	0	0.3726E 01	0.0	0.0
1	16	5	1	0	0	0	0.0	0.0	0.0

Таблица 5.6

```
&SRAN N=42,N1=4 2,
A=16*1.,13.,25*1.,0.,1.56,2*2.1,1.56,2*1.48,
1.56,2*2.1,1.56,2*1.48,1.56,2*2,1,0.2814,1.83,
3*2.1,1.83,2.1,2*2.18,2.1,1.86,2.1,2*2.18,2.1,
1,56,2.1,2*2.18,2.1,1.56,1.3,2*4.2,2.1,0,,
2*4.8,4.53,4.24,3.97,3.87,3.77,3.68,3.41,3.12,
2.85,2.75,2.65,2.56,2.29,2.,1.0377,1.33,1.18,0,
1.18,1.33,2.,2.1,2.2,2.29,2.56,2.85,3.22,3.32,
3.41,3.68,3.97,4.24,4.44,4.53,4.8,4.88,4.88,3*0.
1,56,2*2.1,1.56, 2*1,48,1,56,2*2,1,1.56,
2*1.48,1.56,2*2.1,1.83,1.59,3*2,1,2*1.83,2*2.18,
2.1,2*1.56,2*2,18,2.1,2*1.56,2*2.18,2.1,1486,
1.5,2*4.2,2.1,2*0.,
4.8,4.53,4.24,3.97,3.87,3.77,3.68,3.41,3.12,2.85,
2.75,2.65,2.56,2.29,2.,1.85,100.,1.18,0.,1.18,
1.33,1.85,2.1,2.2,2.29,2.56,2.85,3.22,3.32,
3.41,3.68,3.97,4.34,4.44,4.53,4.8,2*4.88,3*0.,4.8,
3,*42*1,6,5,3,5,3*1,5,3,5,3*1,5,2*3,5,3,
2*3,3,0,3*1,5,3,3*1,5,3,3*1.5,1,10,10,10.
0,14,3*0,3,8*0,3,9*0,3,21*0,1,5,2*0,3,
19*1,21*2,2*1,3*0,2,5*0,2,5*0.2,
AJ=40*0.,3.726,KTEL=2,
A&ND
A&YW NUX=1233,KSET=6,
ST=1.,0.,10.,12.,0,9,1,1,1.38,0,05,
1.,120.,11.,36.,0.83,3.55,1.4,1.2,
1.,516.,9.,24.,1.2,3.49,0.1,1.2,
1.,732.,9.,8.,1.2,1,05,0.1,0,03,
1.,804,,13.,25.,1.77,3.6,2.38,1.2,
1.,1120.,13.,8.,1.77,1.85,2.35,0.85,
A&ND
```

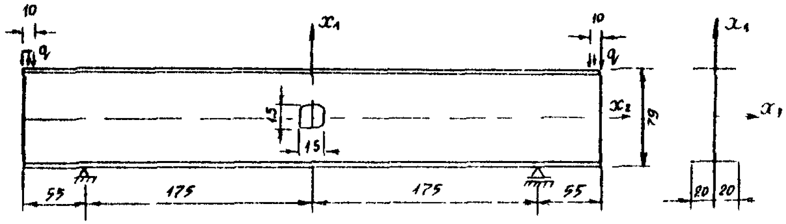


Рис. 5.6. Двутавровая балка, ослабленная отверстием

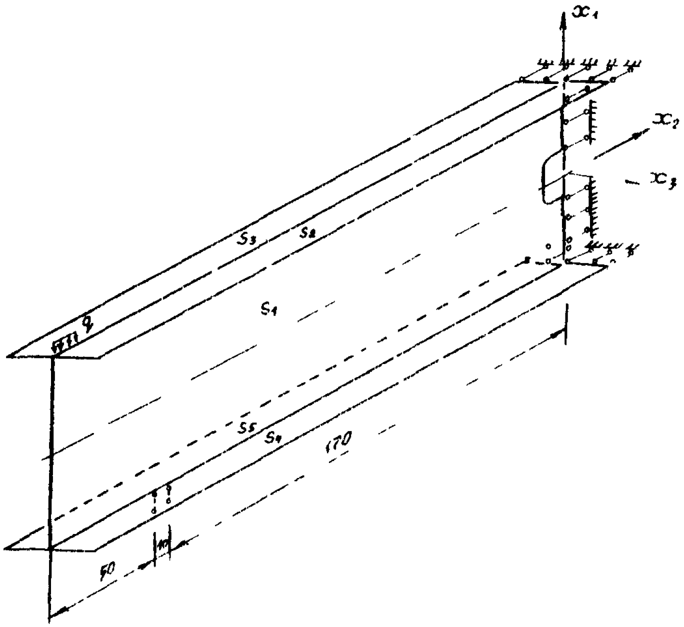


Рис. 5.7. Расчетная схема двутавровой балки

Таблица 5.7

	ГЕОМЕТРИЯ ГРАНИЦЫ				ПРИЗНАКИ								НАГРУЗКИ
0.0	0.230000E 02	0.790000E 01	0.230000E 02	0.744000E 01	1	3	5	1	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.230000E 02	0.744500E 01	0.224500E 02	0.744500E 01	1	5	0	1	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.224500E 02	0.744500E 01	0.222500E 02	0.724500E 01	1	1	0	1	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.222500E 02	0.724500E 01	0.222500E 02	0.614500E 01	1	5	0	1	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.222500E 02	0.614500E 01	0.224500E 02	0.594500E 01	1	1	0	1	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.224500E 02	0.594500E 01	0.230500E 02	0.594500E 01	1	5	0	1	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.230500E 02	0.594500E 01	0.230000E 02	0.0	1	11	5	1	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.560000E 01	0.0	1	5	2	0	1	4	5	0.0	0.0
0.0	0.590000E 01	0.0	0.600000E 01	0.0	1	1	2	99	1	4	5	0.0	0.0
0.0	0.680000E 01	0.0	0.180000E 02	0.0	1	8	2	0	1	4	5	0.0	0.0
0.0	0.180000E 02	0.0	0.230000E 02	0.0	1	5	2	0	1	4	5	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.790000E 01	1	7	0	1	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.790000E 01	0.100000E 01	0.790000E 01	1	1	2	1	0	2	3	0.2125E 02	0.0
0.0	0.100000E 01	0.790000E 01	0.170000E 02	0.790000E 01	1	8	2	1	0	2	3	0.0	0.0
0.0	0.170000E 02	0.790000E 01	0.230000E 02	0.790000E 01	1	7	2	1	0	2	3	0.0	0.0
0.0	0.230000E 02	0.790000E 01	0.230000E 02	0.600000E 01	1	2	5	2	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.230000E 02	0.630000E 01	0.0	0.600000E 01	1	8	0	2	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.600000E 01	0.0	0.790000E 01	1	2	0	2	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.790000E 01	0.0	0.980000E 01	1	2	0	3	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.930000E 01	0.230000E 02	0.980000E 01	1	8	0	3	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.230000E 02	0.930000E 01	0.230000E 02	0.790000E 01	1	2	5	3	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.230000E 02	0.0	0.230000E 02	-0.190000E 01	1	2	5	4	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.230000E 02	-0.190000E 01	0.0	-0.190000E 01	1	8	0	4	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.0	-0.190000E 01	0.0	0.0	1	2	0	4	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.190000E 01	1	2	0	5	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.190000E 01	0.230000E 02	0.190000E 01	1	8	5	5	0	0	0	0.0	0.0
0.0	0.230000E 02	0.190000E 01	0.230000E 02	0.0	1	2	5	5	0	0	0	0.0	0.0

Таблица 5.8

```
&GRAN A(28)=23.,
23.,22.,48.,2*22.,25.,22.,45.,63.,
0.,0.,6.,10.,2*0.,1.,17.,2*25.,3*0.,5*23.,3*0.,23.,
7.0,
 9*7.445,7.245,6.145,2*5.945,
5*0.,4*7.0,2*6.,7.0,2*9.6,0.,2*1.0,0.,1.0,
25.,22.,40.,2*22.,25.,22.,45.,23.,
53.,5.,6.,10.,23.,0.,1.,17.,2*25.,3*0.,5*23.,3*0.,2*23.,
 9*7.445,7.249,6.145,2*5.945,
5*0.,4*7.0,2*6.,7.0,2*9.6,7.0,2*1.0,0.,1.0,
JAR07=1,3,0,1,5,1,5,11,
5,1,6,0,7,1,6,7,2,0,2*2,4,2*2,0,3*2,0,0,
0,4*0,0,3,4*2,0,3*2,5,4*3,5,0,4*0,3,
7*1,0,99,0,0,4*1,5*2,3*3,3*4,3*5,
7*0,4*1,25*0,4*4,0,3*3,10*0,4*5,0,3*5,
AS(13)=-21.26,KORR=.T.,
N=27,NI=27,KTEL=5
&END
&KOFECT
JG(177)=5,JG(182)=3,
JG(49)=30,
JG(153)=5,JG(158)=4,
&END
&STW NUAN=4,KSET=3,
 SY=1.,0.,6.,16.,1.5,7.5,21.5,0.3,
1.,56.,3.,0.,1.2,7.,10.3,0.7,
1.,120.,17.,12.,1.2,2.15,21.7.5,6,
&END
```

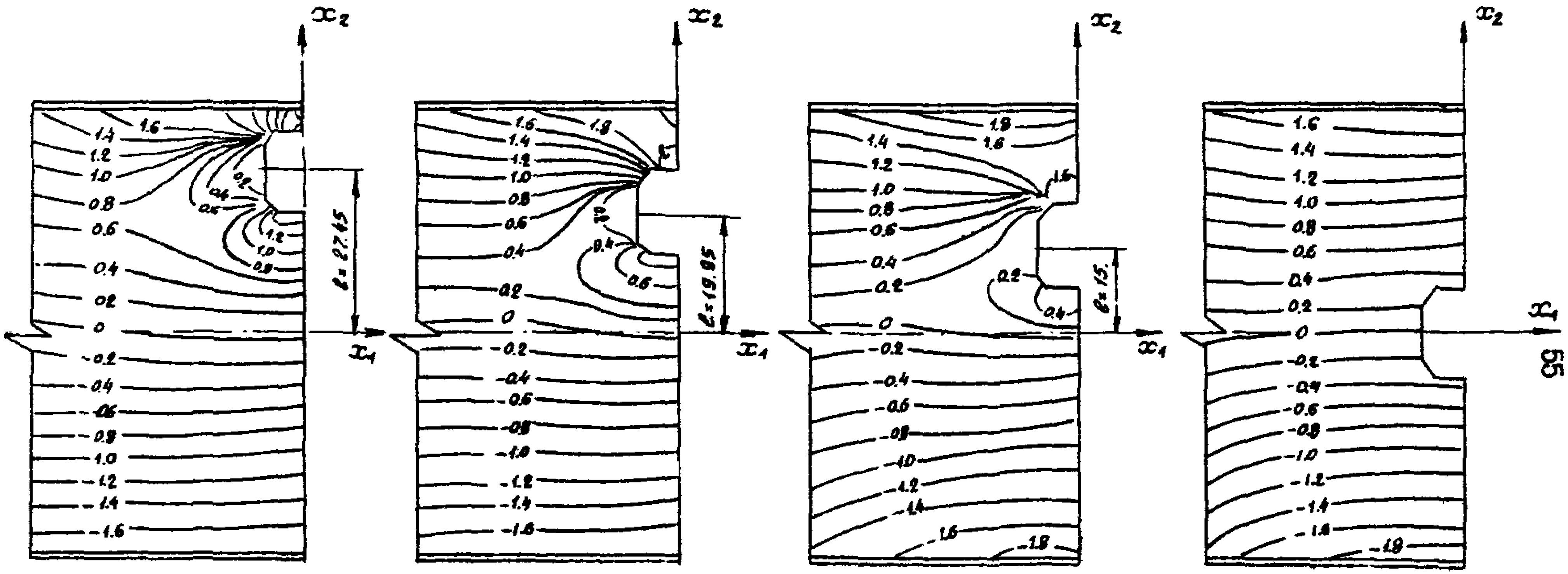


Рис. 5.8. Изолинии напряжений σ_{11}

следует, что по мере удаления отверстия от оси x_2 вблизи наклонных участков контура ослабления появляется концентрация напряжений. Для расчета данной конструкции на ЕС-1033 было затрачено 30 мин.

5.3.7. Аналогичный анализ выполняется при расчете узла, состоящего из трех взаимно перпендикулярных пластин. Оценивался характер концентрации напряжений вблизи жесткой точки при непосредственном соединении элементов (рис. 5.9) и при использовании конструктивных мероприятий, улучшающих работу узла (рис. 5.10). Матрицы геометрии, признаков и нагрузок сведены в табл. 5.9, а исходные данные представлены в табл. 5.10.

По результатам решения построены графики изменения коэффициента концентрации напряжений $\alpha_1 = \sigma_{11}/q$ вдоль оси x_3 при удалении от жесткой точки на $x_1 = 0$, 5δ, 11δ и 26δ, где δ – толщина пластин. При проведении конструктивных мероприятий по снижению концентрации напряжений вблизи жесткой точки (установка распределительных треугольных элементов книц - рис. 5.10) кривые изменения $\alpha_1 = f(x_3)$ имеют более пологий характер. Исследовано также поведение функций $\alpha_2 = \sigma_{22}/q$ и $\alpha_3 = \sigma_{33}/q$ при установке книц и соответствующем изменении точечной передачи нагрузки на линейную вдоль сторон книц.

5.3.8. Характерными объектами, напряженно-деформированное состояние которых целесообразно исследовать с помощью ППП "Потенциал-2", являются конструкции, составленные из отдельных панелей при различных вариантах устройства соединений. Как пример результатов расчета такого объекта на рис. 5.11 изображены эпюры напряжений, возникающие в перегородке, состоящей из четырех панелей, при вертикальных и горизонтальных нагрузках. Связь между панелями осуществляется лишь в направлении нормали к участкам сопряжения, а на фрагментах A задан идеальный контакт. Исходные данные приведены в табл. 5.11.

Для решения задачи контур панелей, включая участки сопряжения, аппроксимировался 308 прямолинейными отрезками. Внутри панелей было выбрано 215 точек, по значениям напряжений в которых построены эпюры.

5.3.9. При исследовании проблемы концентрации напряжений в их машиностроительных конструкциях ставится задача, в которой реальная конструкция аппроксимируется бесконечной или частично ограниченной областью, имеющей отверстия. Применение ППП "Потенциал" позволяет выполнять такой анализ при произвольном очертании

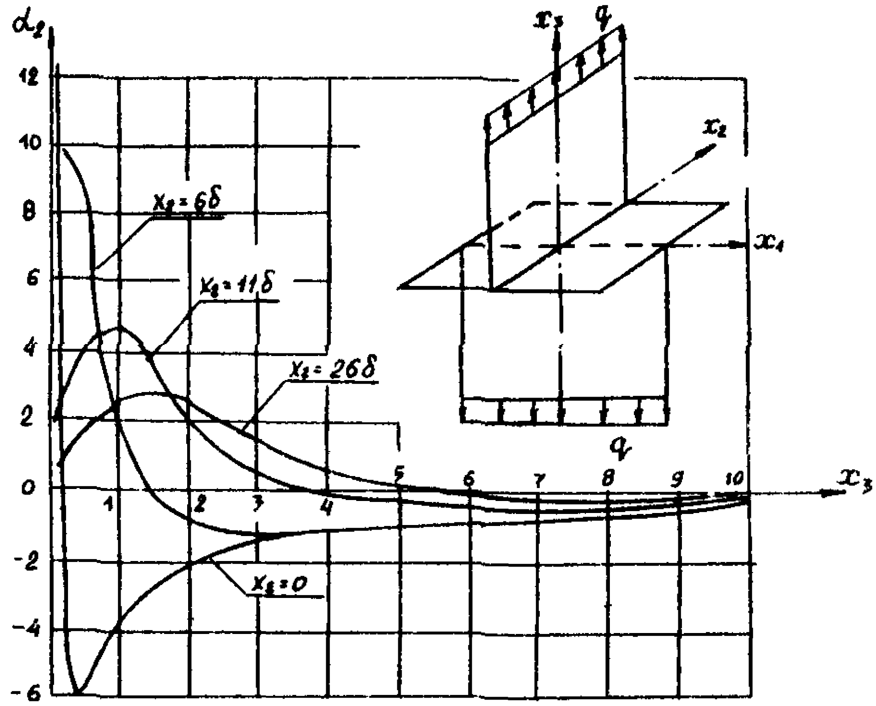


Рис. 5.9. Эпюры $\alpha_2 = \sigma_{22}/q$ вдоль оси X_3

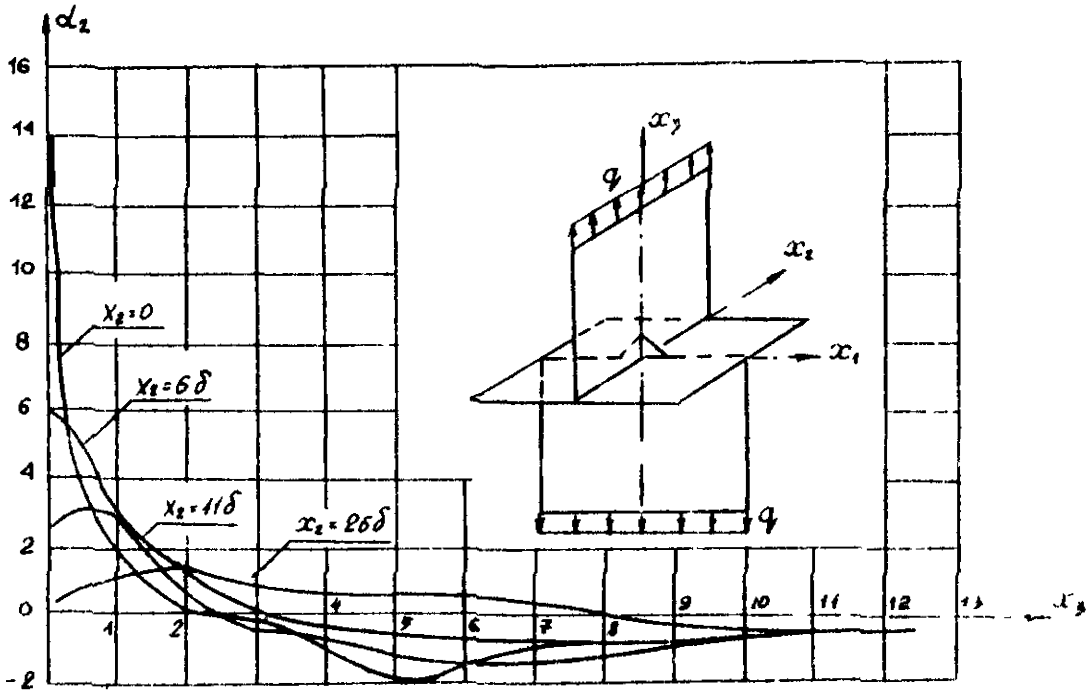


Рис. 5.10. Эпюры $\alpha_2 = \sigma_{22}/q$ вдоль оси X_3

при наличии кницы

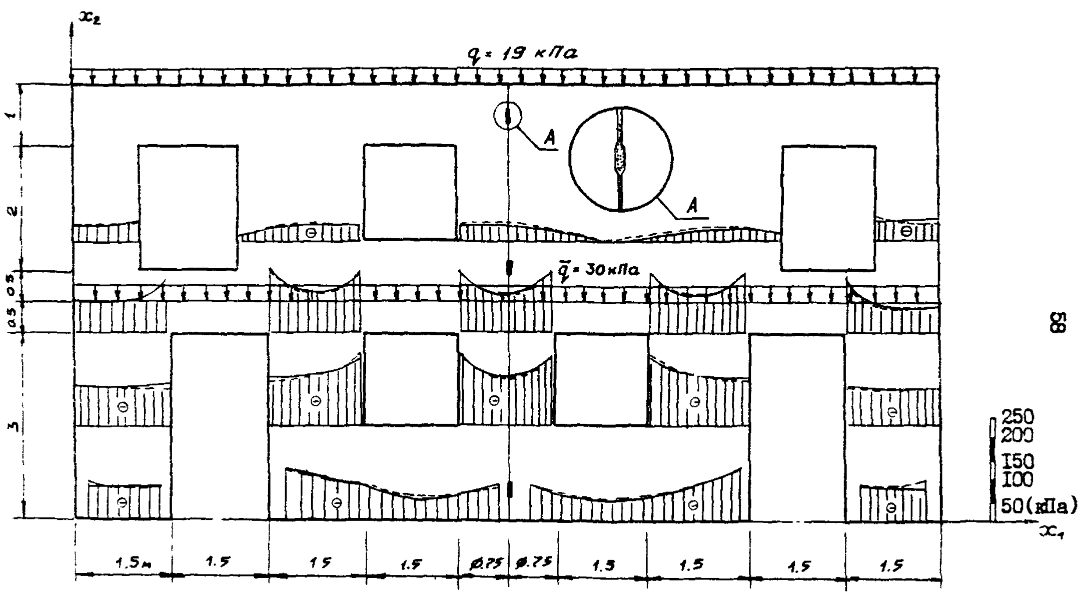


Рис. 5.II. Эпюры напряжений σ_{22} в составной стене здания

	ГЕОМЕТРИЯ ГРАНИЦЫ					ПРИЗНАКИ								НАГРУЗКИ
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.50000E 01	9	10	5	1	0	0	0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.50000E 01	0.0	0.15000E 02	1	0	5	1	0	0	0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.15000E 02	0.0	0.50000E 02	1	0	5	1	0	0	0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.50000E 02	0.30000E 02	0.50000E 02	1	0	0	1	0	0	0	0.1000E 01	0.0
5	0.0	0.30000E 02	0.50000E 02	0.30000E 02	0.10000E 02	1	0	0	1	0	0	0	0.0	0.0
6	0.0	0.30000E 02	0.10000E 02	0.30000E 02	0.0	1	0	0	1	0	0	0	0.0	0.0
7	0.0	0.30000E 02	0.0	0.15000E 02	0.0	1	10	20	1	0	0	0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.30000E 02	0.0	0.15000E 02	1	10	30	2	0	0	0	0.0	0.0
9	0.0	0.15000E 02	0.0	0.50000E 01	0.0	1	0	20	1	0	0	0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.15000E 02	0.0	0.50000E 01	1	0	30	2	0	0	0	0.0	0.0
11	0.0	0.50000E 01	0.0	0.0	0.0	9	10	20	1	0	0	0	0.0	0.0
12	0.0	0.0	0.50000E 01	0.0	0.0	9	10	30	2	0	0	0	0.0	0.0
13	0.0	0.0	0.30000E 02	0.50000E 01	0.30000E 02	1	4	0	2	0	0	0	0.0	0.0
14	0.0	0.50000E 01	0.30000E 02	0.30000E 02	0.30000E 02	1	0	0	2	0	0	0	0.0	0.0
15	0.0	0.30000E 02	0.30000E 02	0.30000E 02	0.50000E 01	1	0	0	2	0	0	0	0.0	0.0
16	0.0	0.30000E 02	0.30000E 01	0.30000E 02	0.0	1	4	0	2	0	0	0	0.0	0.0
17	0.0	0.0	0.30000E 02	0.50000E 01	0.50000E 02	9	10	20	3	0	0	0	0.0	0.0
18	0.0	0.0	0.0	0.50000E 01	0.0	9	10	30	2	0	0	0	0.0	0.0
19	0.0	0.50000E 01	0.50000E 02	0.15000E 02	0.50000E 02	1	0	20	3	0	0	0	0.0	0.0
20	0.0	0.50000E 01	0.0	0.15000E 02	0.0	1	0	30	2	0	0	0	0.0	0.0
21	0.0	0.15000E 02	0.50000E 02	0.30000E 02	0.50000E 02	1	10	20	3	0	0	0	0.0	0.0
22	0.0	0.15000E 02	0.0	0.30000E 02	0.0	1	10	30	2	0	0	0	0.0	0.0
23	0.0	0.30000E 02	0.50000E 02	0.30000E 02	0.40000E 02	1	0	0	3	0	0	0	0.0	0.0
24	0.0	0.30000E 02	0.40000E 02	0.30000E 02	0.0	1	0	0	3	0	0	0	0.0	0.0
25	0.0	0.30000E 02	0.0	0.0	0.0	1	0	0	3	0	0	0	0.1000E 01	0.0
26	0.0	0.0	0.0	0.0	0.35000E 02	1	0	5	3	0	0	0	0.0	0.0
27	0.0	0.0	0.35000E 02	0.0	0.45000E 02	1	0	5	3	0	0	0	0.0	0.0
28	0.0	0.0	0.45000E 02	0.0	0.50000E 02	9	10	5	3	0	0	0	0.0	0.0

Таблица 5.10

```
&GRAN N=20,N1=20,KTEL=3,
A=1.25,9*0.,2*0.0,4*0.,2*1.25,
9*0.,0.0,
4*0.,3*30.,0.,15.,0.,5.,2*0.,5.,2*30.,
 2*0.,2*5.,2*15.,3*30.,4*0.,5.,15.,
2*50.,10.,0.,30.,0.,15.,0.,5.,3*30.,
5.,50.,0.,50.,0.,50.,0.,50.,40.,2*0.,
35.,45.,3*6.,3*30.,15.,0.,5.,3*0.,
5.,3*30.,2*5.,2*15.,4*30.,4*0.,
5.,15.,2*50.,10.,2*0.,15.,0.,5.,2*0.,
2*30.,5.,0.,50.,0.,50.,0.,50.,0.,40.,
2*0.,35.,45.,50.,
J0=9,9*1,2*9,4*1,2*9,5*1,9,
10,5*8,2*10,2*8,2*10,4,2*8,4,2*10,
2*8,2*10,5*8,10,
3*5,3*0,
20,30,20,30,20,30,4*0,20,
30,20,30,20,30,3*0,3*5,
7*1,2,1,2,1,5*2,3,2,3,2,3,2,
6*3,
A*(4)=1.,20*0.,1.,
    KORR=.T.,
  VTOSTR=.T.,
&END
&KORECT  JG(100)=34,JG(131)=34,
&END
```

Таблица 5.II

```
&GRAN N=62,N1=60,
A=60*1.,3*0.,6.75,3*13.5,2*12.,2*10.5,
6.75,2*3.,2*1.5,2*2.5,2*1.,2*6.,2*4.5,
2*6.,2*4.5,2*9.,2*7.5,2*12.5,2*11.,
0.,0.4,0.65,3.25,3.5,6.1,6.35,6.75,7.15,
7.4,10.,10.25,12.85,13.1,10*6.75,
0.,3.5,3*7.,3.5,2*0.,2*3.,3*0.,2*3.,0.,
4.,6.,6.,4.,4.5,2*6.,4.5,1.5,3.,3.,
1.5,1.5,2*3.,1.5,4.,2*6.,4.,
14*3.5,0.,0.4,0.65,2.85,3.1,3.5,3.9,4.15,6.35,6.6,
2*0.,6.75,3*13.5,2*12.,2*10.5,
6.75,2*3.,2*1.5,0.,2.5,2*1.,2.5,
6.,2*4.5,2*6.,2*4.5,6.,9.,2*7.5,9.,
12.5,2*11.,12.5,
0.4,0.65,3.25,3.5,6.1,6.35,6.75,7.15,
7.4,10.,10.25,12.85,13.1,13.5,10*6.75,
3.5,3*7.,3.5,2*0.,2*3.,3*0.,2*3.,
2*0.,2*6.,2*4.,2*6.,2*4.5,
2*3.,2*1.5,2*3.,2*1.5,2*6.,2*4.,
14*3.5,0.4,0.65,2.85,3.1,3.5,3.9,4.15,6.35,6.6,7.,
JA=60*1,2*8,2*12,2*8,4,7,4,7,8,8,
7,4,7,4,5,4,5,4,12*4,5,4,5,4,
1,1,6,1,6,4*1,6,1,6,4*1,6,4*1,6,1,1,
6*0,1,3*0,1,1,3*0,1,20*0,
3,2,3,2,3,2,2*3,2,3,2,3,
2,3,3,2,3,2,3,3,2,3,2,3,
1,2*2,2*3,6*4,5*1,8*2,4*1,
4*4,4*3,7*1,12*4,5*3,36*6,7*2,7*3,5*1,5*2,
AA=2*0.,2*-1.9,32*0.,
14*-3.,132*0.,2*0.714,32*0.,14*1.07,
KPH=2,KTEL=4,NU1=4*0.25,E1=4*2.08,
VTOSTR=.F., YMAS=4*0.25,POTG=.F.,
&END
&STK NUX=62,KSET=11,
  ST=3.,0.,5.,0.,0.,4.5,1.,4.5,
  3.,5.,10.,0.,2.5,4.5,4.4,4.5,
  3.,15.,5.,0.,6.1,4.5,6.75,4.5,
  3.,20.,10.,0.,6.75,4.5,11.,4.5,
  3.,30.,5.,0.,12.5,4.5,13.5,4.5,
  3.,35.,5.,0.,0.,1.5,1.5,1.5,
  3.,40.,6.,0.,3.,1.5,4.4,1.5,
  3.,46.,3.,0.,6.1,1.5,6.75,1.5,
 3.,49.,3.,0.,6.75,1.5,7.4,1.5,
 3.,52.,5.,0.,9.1,1.5,10.5,1.5,
  3.,57.,5.,0.,12.,1.5,13.5,1.5,
  JP=20*2,15*3,14*1,13*4,
&END
```

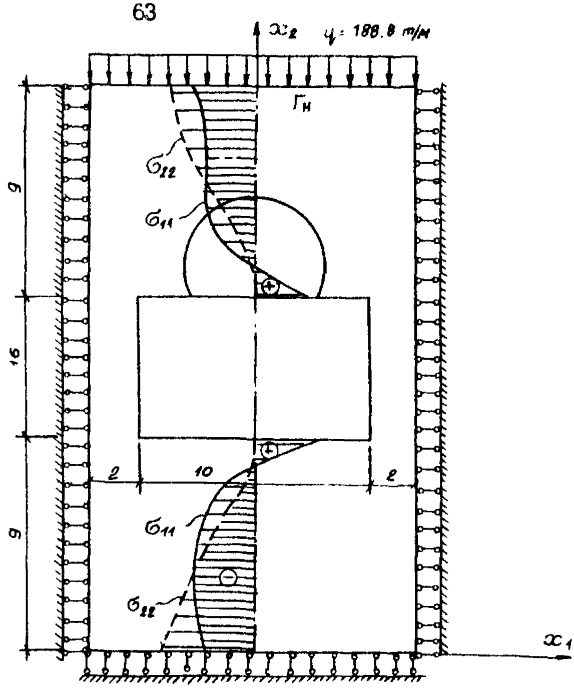
ослабления, слоистом строении окружающей среды, частичной или полной закладки отверстия вставкой из другого материала и других особенностях конструкции.

5.3.10. Для примера рассмотрим результаты расчета массива, напряженное состояние которого исследовалось при изменении конфигурации циклически повторяющихся отверстий (рис. 5.12). Массив находился в условиях плоской деформации. Материал конструкции характеризовался модулем упругости $E = 293 \cdot 10^5$ КПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,25$ и весьма низкой способностью к восприятию растягивающих напряжений. Нагрузка представлялась массовыми силами ($\gamma = 236$ Н/м^3) по области S и равномерно распределенным давлением на границе Γ_H. С учетом условий симметрии задачи рассматривалась одна циклически повторяющаяся часть области. При прямоугольном отверстии появлялись значительные растягивающие напряжения в середине пролета, что видно из рис. 5.12, где изображены изолинии нормальных напряжений вдоль вертикальной оси.

5.3.11. Аналогично рассчитывалась конструкция, в которой по сравнению с предыдущей задачей несколько изменялись исходные данные: отверстию придавалась сводчатая форма, $E = 10^7$ КПа, $\nu =$ 0,2, $\gamma = 350$ Н/м^3 (рис. 5.13). Принятая схема аппроксимации границы незначительно отличалась от приведенной выше. В результате расчета было установлено, что устройство свода уменьшает растягивающие напряжения и вызывает появление большого распора у пят арки (рис. 5.14).

5.3.12. Для иллюстрации процесса подготовки входных данных для ППП "Потенциал-3" и анализа точности получаемых результатов рассмотрим ряд пространственных задач о концентрации напряжений в тонких пластинах и оболочках при нагружении растягивающими усилиями. Будем предполагать, что радиус отверстия соизмерим с толщиной пластины. Тогда распределение напряжений вблизи ослабления носит существенно трехмерный характер и может быть точно оценено лишь с позиций трехмерной теории.

5.3.13. Классическим примером определения напряженно-деформированного состояния вблизи отверстия в тонкой изотропной бесконечной пластине является решение задачи Кирша [15]. Рассмотрим НДС, возникающее в районе ослабления цилиндрическим отверстием радиуса $R = 1$ (рис. 5.15). Толщина плиты $h = 2R$, ее ширина и длина - $32R$. Материал характеризуется величинами $E = 2.06 \times 10^6$ кг/см^2 и $\nu = 0,3$. Равномерно распределенная нагрузка единичной интенсивности приложена к грани, параллельной плоскости $x_1 x_3$



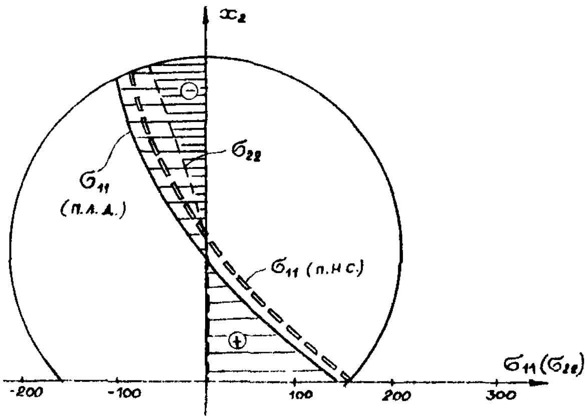


Рис. 5.12. Эпюры нормальных напряжений σ_{11} и σ_{22} в массиве горных пород, ослабленном выработкой

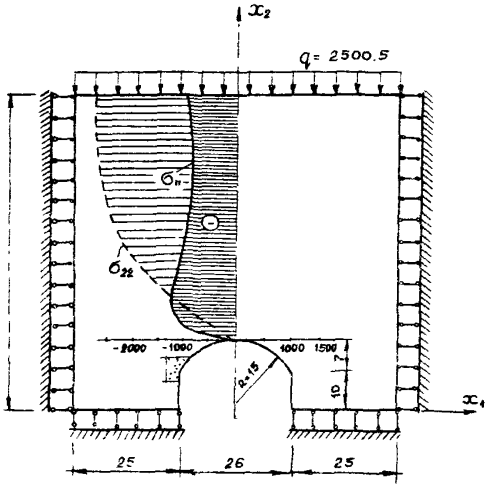


Рис. 5.13. Расчетная схема сводчатой выработки

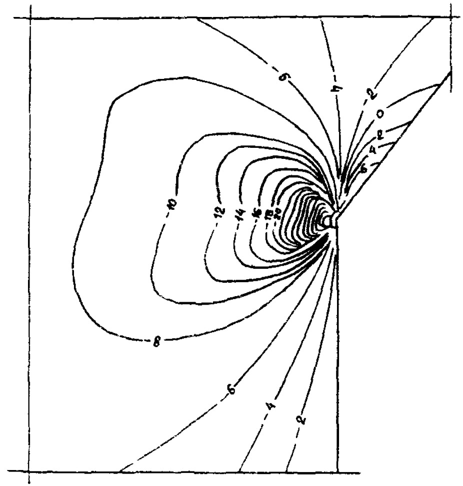


Рис. 5.14. Изолинии напряжений σ_{22} у опорной пяты свода

Поскольку исследуемое напряженно-деформированное состояние объекта имеет две плоскости симметрии, в качестве объекта расчета выбирается четверть плиты (выделена на рис. 5.15 утолщенной линией). В этом случае задается специальное значение признака симметрии *KS*. Геометрия расчетного фрагмента (рис. 5.16) состоит из двух плоских четырехугольных фрагментов, двух плоских фрагментов с отверстиями и участка цилиндрической поверхности. Эти фрагменты приняты в качестве базисных и их аппроксимация плоскими элементами осуществляется модулями обработки входных данных по заданным параметрам дискретизации. Аппроксимирующая сетка, соответствующая оперативному уровню геометрической информации, изображена на рис. 5.16. Параметры базисных фрагментов заносятся в поле координат *A* (табл. 5.12).

Информация о граничных условиях, признаках нагруженных фрагментов и параметрах дискретизации заносится в поле признаков *JA*.

Граничная нагрузка на базисном фрагменте 2 задается постоянной интенсивности по направлению внешней нормали к поверхности фрагмента и заносится в поле нагрузок *PQ*.

Описанные входные данные объединены в файл *ØGRAN*.

Так как на границе всего объекта заданы статические граничные условия, неизвестные компоненты вектора перемещений определяются с точностью до произвольных постоянных, что при численном решении приводит к неустойчивой схеме численной реализации.

Две из трех постоянных принимают нулевые значения из-за симметрии объекта исследования и, как следствие, выбора в качестве расчетного фрагмента 1/4 пластины.

Значение третьей постоянной определяется закреплением по направлению оси x_1 плоского граничного элемента с номером 18 (рис. 5.16). Для этой цели используется файл с именем *ØKORECT* позволяющий откорректировать поле признаков *JA* на оперативном информационном уровне.

Для определения зоны максимальных напряжений у ослабления расчетные точки располагались вдоль прямых, проходящих через центры 60-го и 66-го плоских элементов граничной поверхности (рис.5.16) на расстояниях *Ø., -Ø.1R, -Ø.25R, Ø.5R, R* от границы объекта. Топологически внутренние точки объединены в два поля (*NPMAX=2*) по пять точек в каждом(*NPOLE=5*) Информация для вычисления координат внутренних точек вводится в файл с именем *ØSTK*

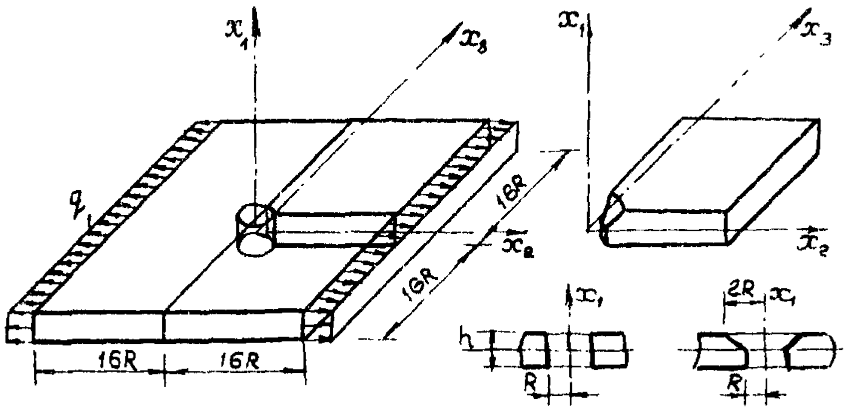


Рис.5.15. Расчетный элемент пластины с отверстием

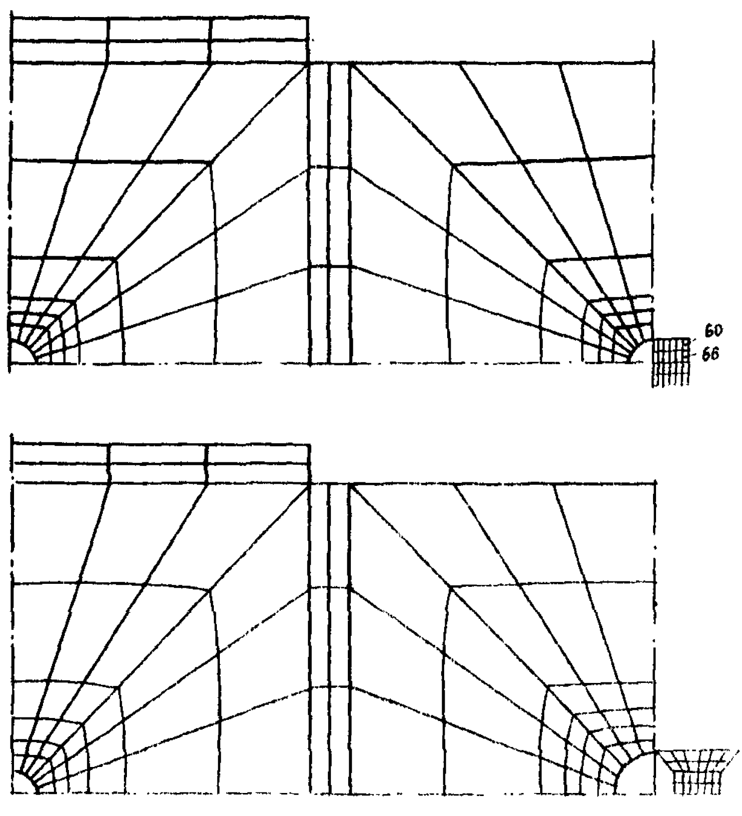


Рис. 5.16 Фрагментация граничной поверхности

Таблица 5.I2

№ п/п	Тип геометрии	Строка I матрицы $A(I,J)$															Параметры разбивки	
		j =I	j =2	j =3	j =4	j =5	j =6	j =7	j =8	j =9	j =I0	j =II	j =I2	j =I3	j =I4	j =I5	M	N
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9
I	2	I.	Ø.	I6.	-I.	Ø.	I6.	-I.	I6.	I6.	I.	I6.	I6.	Ø.	Ø.	Ø.	I	3
2	2	I.	I6.	I6.	-I.	I6.	I6.	-I.	I6.	Ø.	I.	I6.	Ø.	Ø.	Ø.	Ø.	I	3
3	3	I.	I6.	Ø.	Ø.	I6.	I6.	I6.	I.	Ø.	Ø.	9Ø.	I.8	Ø.	Ø.	Ø.	6	4
4	3	-I.	I6.	Ø.	Ø.	I6.	I6.	I6.	I.	Ø.	Ø.	9Ø.	I.8	Ø.	Ø.	Ø.	6	4
5	9	I.	Ø.	2.	-I.	Ø.	9Ø.	Ø.	Ø.	Ø.	Ø.	Ø.	Ø.	Ø.	Ø.	Ø.	6	4

№ п/п	Строка J матрицы JA(I,J)								
	j =I	j =2	j =3	j =4	j =5	j =6	j =7	j =8	j =9
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0
I	2	I	I	I	I	I	2	I	3
2	2	I	I	4	I	I	2	I	3
3	3	I	I	I	I	I	2	6	4
4	3	I	I	I	-I	I	2	6	4
5	9	I	I	I	-I	I	2	6	4

№ п/п	Номер базисного фрагмента	Компоненты вектора нагрузки в системе n_i		
		n_1	n_2	n_3
I	2	3	4	5
I	2	I.	Ø.	Ø.

Подробная структура входных данных, вводимых в файлах &GRAN, &KORECT и &STK, и правила их подготовки изложены в [7]. В настоящей работе ограничимся демонстрацией внешнего вида бланка для подготовки входных данных рассматриваемой задачи (табл. 5.13).

Таблица 5.13

```
&GRAN
R=3*1.,-1.,1.,0.,3*16.,0.,2*16.,2*0.,2.,
  2*-1.,2*0.,-1.,0.,3*16.,0.,4*16.,
  90.,2*-1.,2*16.,0.,2*16.,2*1.,0.,16.,4*0.,
  2*1.,3*0.,2*16.,2*90.,0.,16.,0.,2*1.0,
JA=2*2,2*3,9,JA(17)=2,JA(24)=2*-1,
JA(31)=5*2,2*1,2*6,4,2*3,2*4,6,
PQ(2)=10.6667,2*0.,10.6667,2*0.,10.6667,
NFRAG=5,KS=4,E=1.,
IFPULT=2*1,5*0,1,
&END
&KORECT
JA(174)=3,
&END
&STK
NPMAX=2,NPOLE=5,
EPS=0.,-0.1,-0.25,-0.5,-1.,
NNN=60,66,NNK=60,66,
&END
```

Изображенные на рис. 5.17 изолинии σ_{22} позволяют выделить наиболее опасную зону, где напряжения становятся максимальными. Кривые распределения σ_{22} в этой зоне показаны на рис. 5.18. На границе плиты при $x_1 = \pm R$, $x_2 = R$ $\sigma_{22} = 2{,}8$ кПа (кривая I на рис. 5.18). В срединной поверхности при $x_1 = 0$ $\sigma_{22} = 3{,}1$ кПа (кривая 6 на рис. 5.18).

Полученные результаты сравнивались с точным решением и со значениями σ_{22}, вычисленными по методу конечных элементов. Во всех узлах кривой I сопоставляемые величины практически тождественны. Исключение составляет угловая точка, где результат применения метода потенциала дает более близкие к точному значения, а метод конечных элементов определяет несколько завышенный коэффициент концентрации (2,96). Распределение напряжений σ_{22} в срединной поверхности, определенное по методу потенциала (кривая 6) и по МКЭ (кривая 8), практически не отличаются, а коэффициент концентрации (3,08) соответствует точному решению.

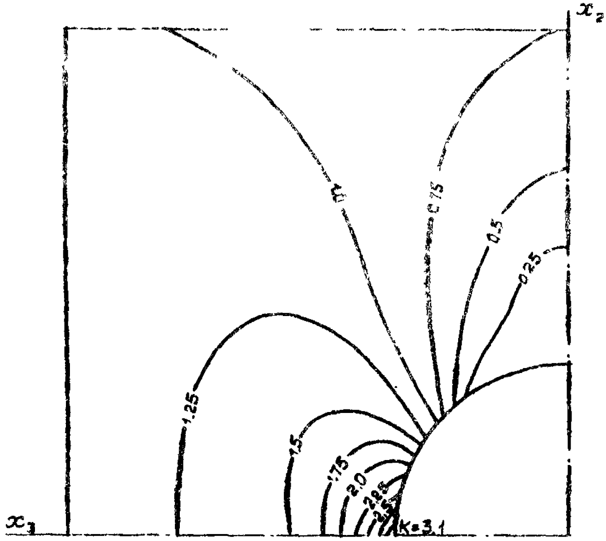


Рис.5.17. Изолинии напряжений σ_{22} у отверстия в задаче Кирша

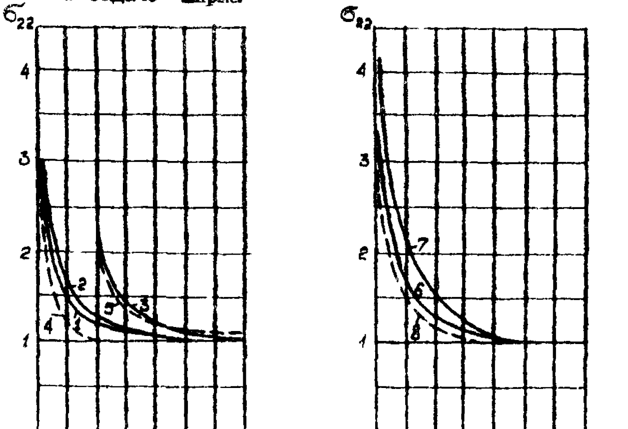


Рис. 5.18. Изменение напряжений σ_{22} у отверстия в плоскости $x_2 = 0$

5.3.14. Проведенный анализ позволяет перейти к более сложным задачам такого класса, аналитическое решение которых отсутствует.

В первую очередь рассмотрим описанную ранее задачу при ослаблении в виде отверстия с зенковкой (см. рис. 5.15). Глубина зенковки $0{,}5h = R$, угол ее раствора 90°. Остальные параметры соответствуют предыдущей задаче.

Появление зенковки приводит к изменению геометрических характеристик расчетного фрагмента. Для третьего основного фрагмента изменяется радиус отверстия, для пятого – высота цилиндра. Добавляется шестой фрагмент – коническая поверхность. Однако эти изменения несущественно увеличивают объем входных данных (табл. 5.14) и позволяют с минимумом корректировок использовать входные данные предыдущей задачи (см. табл. 5.13).

Таблица 5.14

```
A=3*1.,-1.,1.,2*0.,3*16.,0.,1.,2*16.,2*0.,2*1.,
   2*-1.,2*0.,-1.,2.,0.,3*16.,2*0.,4*16.,
   2*90.,2*-1.,2*16.,2*0.,2*16.,2.,1.,2*0.,16.,5*0.,
   2*1.,4*0.,2*16.,2*90.,2*0.,16.,0.,2*1.9,
JA=2*2,2*3,9,6,JA(20)=5,JA(28)=3*-1,
JA(37)=6*2,2*1,4*6,,2*3,5,6,2*2,
PQ=32.,
NFRAC=6,KS=4,E=1.,KT=10,
IFPUL7=2*1,5*0,1,
&END
&KORECT
JA(213)=3,
&END
&STK
NPMAX=2,NPOLE=7,
EPS=-0.000815,-0.1,-0.25,-0.5,-1.,2.,4.,
NMN=90,96,NAK=90,96,
&END
```

Полученные для нижней грани пластины $x = 0{,}5h$ напряжения σ_{22} (кривая 2 на рис. 5.18) практически совпадают с решением задачи Кирша и характеризуются максимальным коэффициентом концентрации $k = 2{,}86$. Однако эти результаты отличаются от распределения σ_{22}, вычисленных по МКЭ (кривая 4) в сторону более плавного убывания значений функции с увеличением координаты x_3. При $x_1 = 0{,}5h$ (верхняя грань пластины) расхождение по напряжениям между методом потенциала (кривая 3) и МКЭ (кривая 5) не превышает 2-4%.

Распределение σ_{22} в срединной поверхности пластины $(x_1 = 0)$ показано на рис. 5.18 (кривая 7). Здесь $\sigma_{22} =$ $= 4{,}2$ кПа при $x_1 = R$, что совпадает со значением, полученным по МКЭ.

5.3.15. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние в зоне цилиндрического отверстия радиусом $R_{отв} = 1$ в толстой цилиндрической оболочке (рис. 5.19). Толщина оболочки $h = 2R_{отв}$, внешний и внутренний радиусы поверхности соответственно: $R_н = 6{,}1 R_{отв}$; $R_{вн} = 4{,}1 R_{отв}$, длина оболочки $H = 32 R_{отв}$. По торцам приложена равномерно распределенная растягивающая нагрузка единичной интенсивности. Материал оболочки характеризуется $E = 206$ ГПа и $\nu = 0{,}3$.

Ввиду симметрии объекта и нагрузки для расчета принята четверть оболочки (рис. 5.19). Геометрия расчетного фрагмента задается в виде совокупности кольцевого элемента плоскости (рис. 5.20, I), четырех цилиндрических фрагментов II-У, трех элементов для реализации алгоритма построения пересечения цилиндрических поверхностей (рис. 5.20. УI-УШ).

Распечатка входных данных приведена в табл. 5.15.

Таблица 5.15

```
&GRAN
A=2.7,4.1,2.7,0.,2,7,4*1.,2.7,0.,
   13.3,6.1,13.3,2.7,13.3,2*4.1,2*6.1,13.3,2.7,
   6.1,16.,3*4.1,4*90.,2*6.1,
   4*-90.,60.,4*0.,00.,-90.,
   60.,90.,2*60.,90.,2.7,2*0.,2.7,90.,60.,
   5*0.,60.,2*90.,60.,2*0.,
   6*0.,-1.,1.,3*0.,
   5*0.,90.,2*0.,90.,2*0.,
   5*0.,2.,2*0.,1.7,
JA=4.5,3*4.8,2*7,8,2*4,JA(35)=4,JA(47)=6*-1,
JA(67)=11*2,5,6,2*5,1,4*6,1,2*5,1,5,1,5,3*2,3,5,1,
PQ=1.,
NFRAG=11,KS=2,E=1.,KT=10,
IFPULT=2*1,5*0.1,
&END
&KORECT
JA(265)=3,JA(286)=3,
&END
&STK
NPMAX=1,
EPS= 0.,-0.1,-0.5,-1.,-2.,-3.,-1.,2.,4.,
NNN 6=79,NNK=6*102,
&END
```

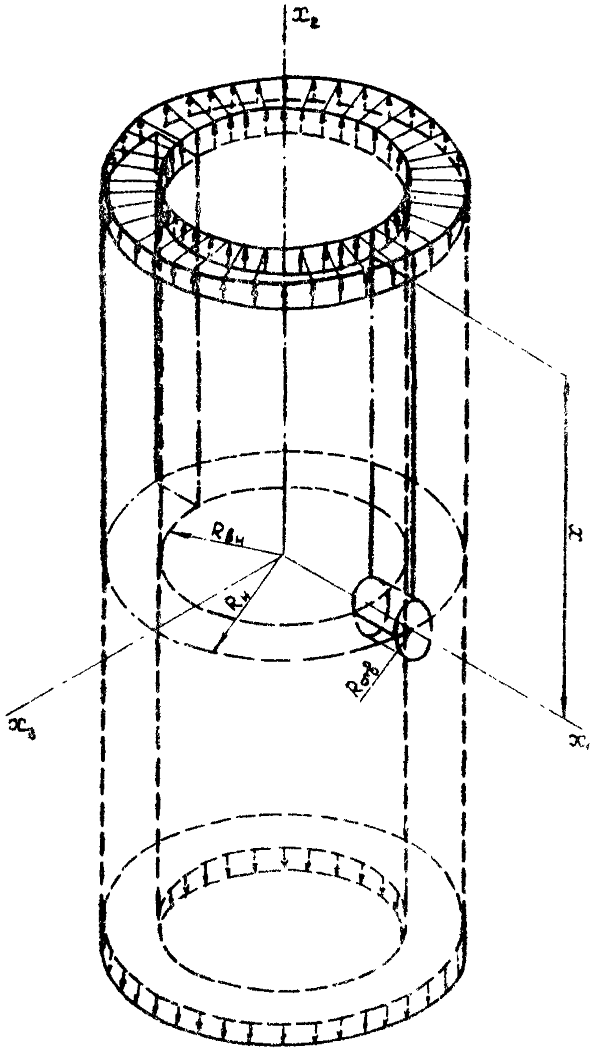


Рис. 5.19. Расчетный фрагмент толстостенного цилиндра

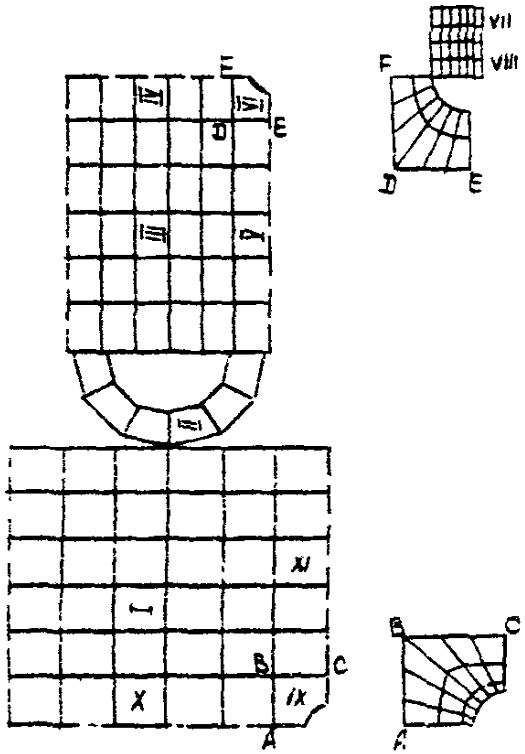


Рис. 5.20. Фрагментация граничной поверхности расчетного фрагмента

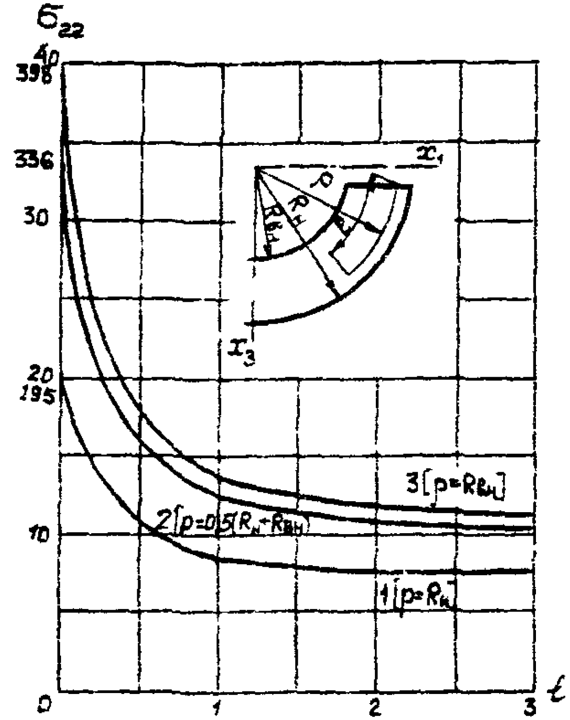


Рис. 5.21. Распределение напряжений у отверстия в сечении $x_2 = 0$

Для исследования зоны ослабления выполнялось два расчета полей внутренних точек. В первом из них определялись напряжения во всех точках, получаемых путем сдвига внутрь объекта совокупности центральных точек плоских элементов, аппроксимирующих базисный фрагмент 6 (см. рис. 5.16). Данные этого расчета использованы для построения изолиний напряжений σ_{22} (рис. 5.22 - 5.25) и выявления зоны максимальных напряжений.

Следующий расчет выполнялся для уточнения максимальных значений напряжений σ_{22} в плоскости $x_2 = 0$. Ввиду сложности геометрии объекта координаты внутренних точек в этой зоне задаются с помощью специально написанной подпрограммы $POLE$, входная информация для которой заносится в массив PL, заполняемый в файле &STK.

На рис. 5.21 изображены кривые изменения напряжений σ_{22} в зависимости от увеличения длины дуги ℓ окружности фиксированного радиуса ρ. За начало отсчета расстояния принята точка пересечения окружности радиуса ρ с поверхностью отверстия. Изображены кривые для трех значений параметра ρ: $\rho = R_н$ (кривая I) - у наружной поверхности оболочки; $\rho = 0{,}5\,(R_н + R_{вн})$ (кривая 2) - для срединной поверхности; $\rho \approx R_{вн}$ (кривая 3) - у внутренней поверхности оболочки.

5.3.16. Расчет фундаментов под тяжелые высокоточные металлообрабатывающие станки.

5.3.16.1 Постановка задачи.

На рис. 5.26, 5.27 показаны соответственно вид и габаритные размеры фундамента под горизонтально-расточной станок. Масса обрабатываемого изделия $Q_{из}$ = 60 т. Подвижные части станка перемещаются по станине из крайнего левого положения B_1 в крайнее правое положение B_3 и имеют массу $Q_{ст}$ = 93 т. Для обеспечения устойчивости и надежной работы станка фундамент выполнен в виде сложной пространственной конструкции, изготовленной из монолитного железобетона. Основание под фундаментом укреплено сплошным свайным полем.

Сложность расчетов подобных конструкций фундаментов определяется в основном тем, что особо ответственные детали и узлы тяжелого и энергетического оборудования должны выполняться с высоким классом точности обработки, а деформации фундамента под

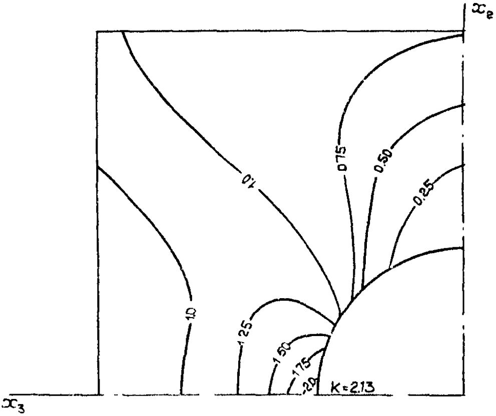


Рис. 5.22. Изолинии σ_{22} при $\rho = 0.125(7R_н + R_{вн})$

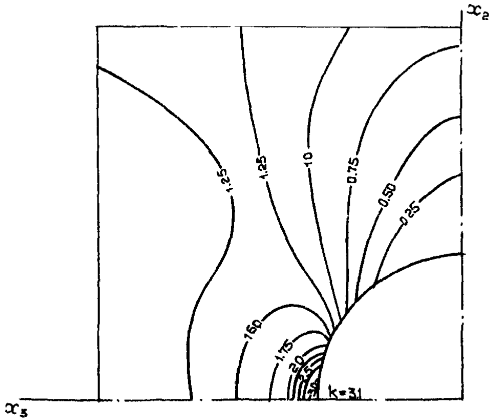


Рис. 5.23. Изолинии σ_{22} при $\rho = 0.125(5R_н+3R_{вн})$

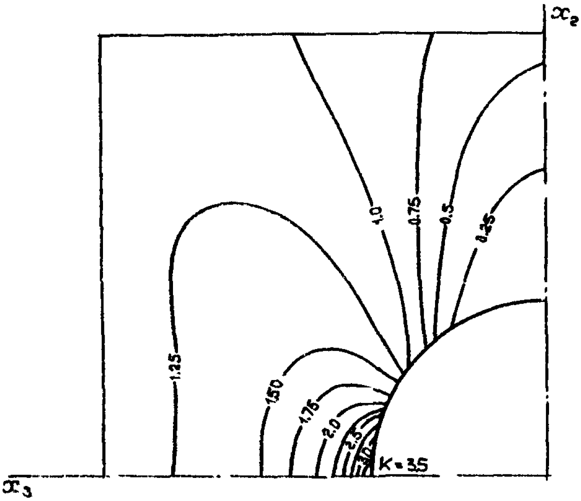


Рис. 5.24. Изолинии σ_{22} при ρ = 0.125($3R_н$ +$5R_{вн}$)

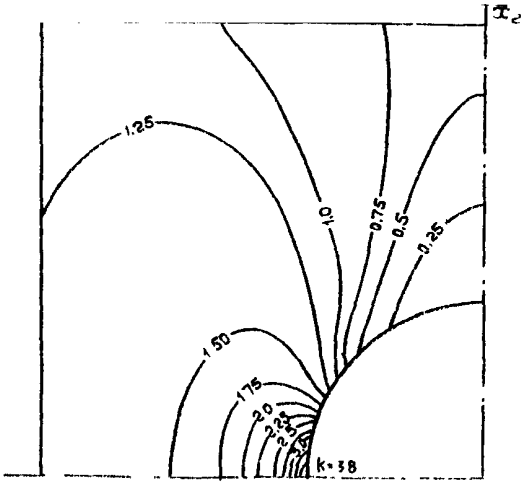


Рис. 5.25 Изолинии σ_{22} при ρ = 0.125($R_н$ +$7R_{вн}$)

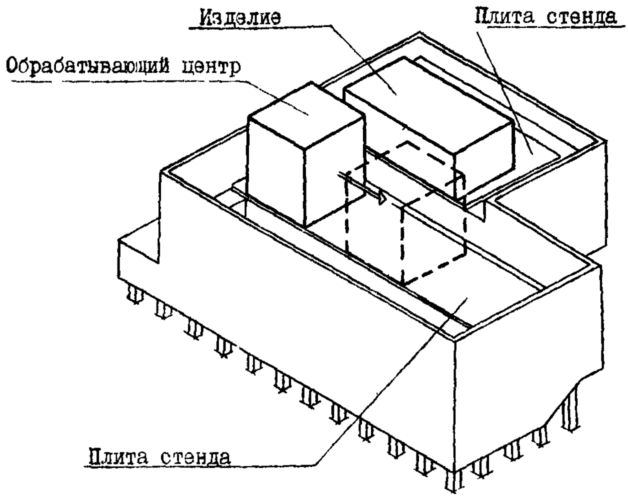


Рис. 5.26. Фундамент под обрабатывающий центр

действием временных и подвижных нагрузок могут влиять на паспортную точность станка (особенно при обработке горизонтальных участков поверхности). Чтобы избежать этого нежелательного явления, при проектировании фундаментов должны удовлетворяться жесткие технологические требования на ограничения величин деформаций фундамента от внешних нагрузок. Так, в рассматриваемом случае разность перемещений между произвольной точкой на обрабатываемой детали и центром масс подвижных частей станка не должна превышать

$$-0{,}05 \le \Delta u_1 \le 0{,}05 \text{ мм}. \qquad (5.1)$$

Требование (5.1) ограничивает деформации фундамента при использовании самых чувствительных к ним режимов обработки деталей – фрезерования и строгания. Несоблюдение условия (5.1) приводит к значительным отклонениям от прямолинейности трасс обработки детали и общему искажению проектных плоскостей. Например, при изготовлении и последующей сборке узлов атомных энергосиловых установок эти отклонения от плоскости могут привести к потере герметичности и утечке радиоактивных веществ.

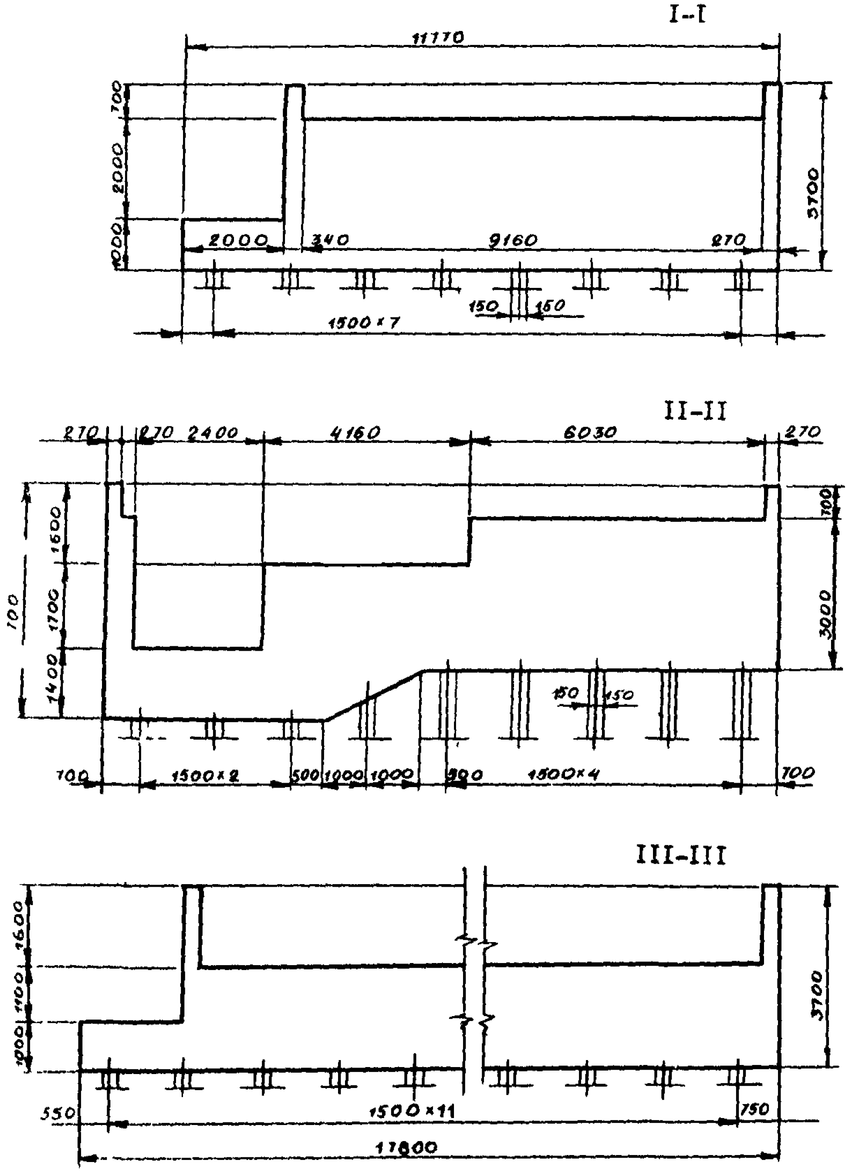


Рис. 5.27. Разрезы фундамента

Кроме того, отрицательным фактором, проявляющимся на режимах фрезерование-строгание при отклонении от прямолинейности трасс обработки, является изменение толщины слоя снимаемого материала. Это может повлечь за собой неоправданно быстрый износ и порчу дорогостоящего металлообрабатывающего инструмента. Изменение усилий резания ведет к ускоренному износу деталей станка, его управляющих органов и общему снижению его классности. Для исследования выполнения условия (5.I) необходимо построить функции влияния ΔU для различных характерных точек при перемещении движущихся частей станка в пределах их хода по направляющим станины для режимов прямолинейной обработки.

Кроме условия (5.I) технологическими требованиями вводятся ограничения на максимальный угол отклонения от горизонтальной поверхности:

$$-0{,}015 \le \Delta\varphi_{max} \le 0{,}015 \text{ мм/м}. \qquad (5.2$$

Величина $\Delta\varphi_{max}$ является мерой угла поворота и определяется отношением разности прогибов к погонному метру горизонтальной трассы.

Местная прочность фундамента в зонах, примыкающих к рабочим органам станка и стендовой площадке, на которой располагаются обрабатываемые детали, должна позволять длительную эксплуатацию станка без образования трещин, сколов и локальных остаточных деформаций, отражающихся на точности выполнения технологических операций и нарушающих целостность подстаночных коммуникаций.

Указанные требования не учитываются обычными предпосылками расчета фундаментов в строительстве, при которых тело фундамента можно считать абсолютно жестким под системой действующих на него нагрузок, состоящих из собственного веса конструкций и комбинации временных нагрузок. Принятые в практике строительства осадки зданий и сооружений на несколько порядков превышают величины, которые необходимо удовлетворить в соответствии с требованиями (5.I), (5.2).

Следует также отметить, что перемещения фундамента под действием собственного веса конструкций и оборудования не оказывают влияния на точность обработки деталей, так как компенсируются при монтаже и наладке оборудования; технологические ограничения (5.I), (5.2) касаются действия временных нагрузок и подвижных частей станка. По своей величине эти нагрузки составляют лишь

10-15% веса фундамента и станка. В то же время технологические требования должны выполняться обязательно.

Ввиду того, что обычные методы расчета фундаментов в строительстве не могут обеспечить необходимую точность определения характерных параметров, на стадии проектирования расчеты следует выполнять в два этапа. На первом этапе производится расчет и конструирование фундаментов от общих статических нагрузок с учетом требований, регламентируемых в строительстве, а также конфигурации и количества оборудования. На этой стадии проектирования фундамент считается жестким штампом, который составляет единое целое со свайным полем и массивом грунта, заключенным между сваями. Могут быть применены и другие расчетные схемы и упрощающие инженерные методы.

Вторая часть расчета заключается в определении напряженного состояния и деформации надземных поверхностей законструированного на первом этапе фундамента. Этот расчет выполняется для экстремальных сочетаний временных и подвижных нагрузок, позволяя проверить требования (5.1), (5.2). Для достижения необходимой точности вычисляемых характеристик фундамент рассматривается как пространственное изотропное тело, напряженно-деформированное состояние которого определяется в результате решения трехмерной задачи теории упругости.

5.3.16.2. Физико-механические характеристики моделей фундамента и основания.

Физико-механические характеристики назначены для конкретного фундамента и площадки его размещения. Модуль упругости для монолитного железобетона $E = 2 \cdot 10^6$ т/м, коэффициент Пуассона $\nu = 0.166$. План фундамента, на котором указаны его вес, габаритные размеры, трассы движения исполнительных органов станка $Q_{ст}$, изображен на рис. 5.28. На этом же рисунке указано расположение на рабочем столе и вес максимальной временной нагрузки Q. На рис. 5.27 - разрезы по сечениям I-I, 2-2, 3-3.

Для окончательного определения расчетной схемы следует предварительно задать закон, описывающий совместную работу пространственного тела фундамента со свайным полем. В рассматриваемом варианте решения принято, что пространственный фундамент опирается на сплошное изотропное упругое основание Винклера. Такая идеализация основана на следующих предпосылках:

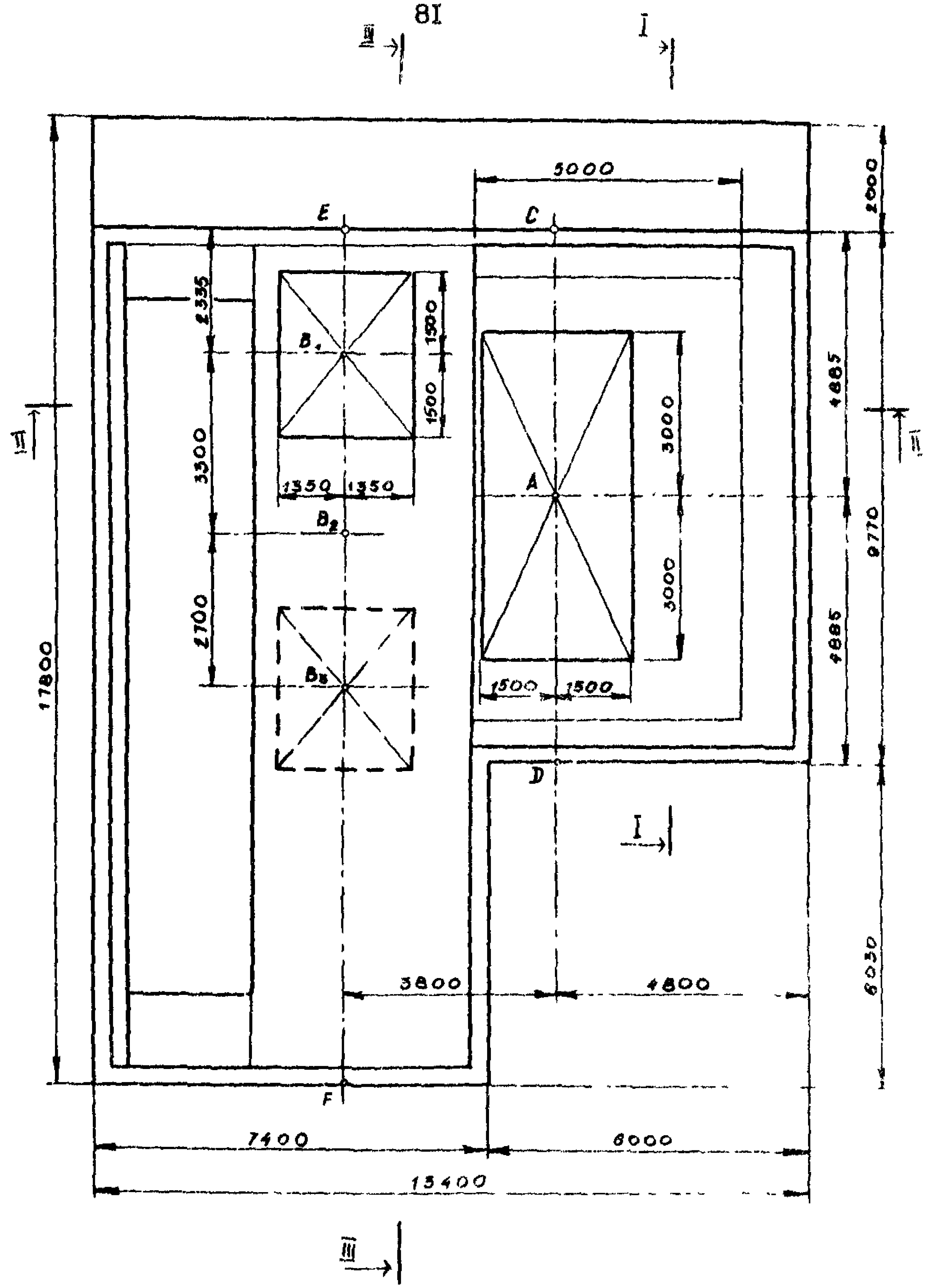


Рис. 5.28. План фундамента

во-первых, удовлетворение технологическим требованиям предполагает определение характеристик напряженно-деформированного состояния в зонах, прилегающих к рабочей поверхности фундамента. При заданных габаритных размерах фундаментного массива влияние дискретного свайного основания в этих зонах уже практически не ощущается. Процесс затухания влияния свайного поля на напряженно-деформированное состояние полностью подтверждается результатами решения задачи о ростверке (5.I);

во-вторых, сваи, пронизывающие верхние слои грунта и опирающиеся на более плотные и ненарушенные горизонты, работают как система однородных упругих связей, что в полной мере отражается гипотезой Винклера. Так как определяется напряженно-деформированное состояние конструкции, лежащей на упругом основании, то отказ от учета более тонких эффектов работы реального основания не повлечет за собой накопления слишком больших погрешностей в полученном решении;

в-третьих, линейность работы данного основания обеспечивается тем, что на стадии конструирования в расчеты заложено использование только 20% несущей способности свай, а в таких пределах осадки свай линейно зависят от прикладываемых к ним нагрузок. Использование лишь малой части несущей способности свай объясняется ответственностью всего сооружения и отсутствием необходимых нормативных материалов.

Для определения коэффициента постели модельного основания использованы результаты натурных испытаний одиночной сваи, проведенные на площадке размещения проектируемого фундамента. На рис. 5.29 показаны результаты испытания сваи в виде графика зависимости между нагрузкой на сваю P и ее осадками W.
На графике отмечено значение предельно допустимой нагрузки $P_{доп} = 20т$, соответствующее 20% несущей способности сваи. При $P_{доп}$ зафиксирована упругая деформация сваи $W_{доп}$ = 0,03 см.

Исходные данные для определения эквивалентного коэффициента постели следующие:

$\ell_{св}$ = I4 м – длина сваи; $\ell_з$ = I2 м – длина заглубленной части сваи; $S_{св}$ = 35x35 см^2 – площадь поперечного сечения сваи; $\Sigma S_{фунд}$ = 202,4 м^2 – общая площадь пяты фундамента; $\Sigma S_{св}$ = = 35x35x92 = I7,9 м^2 – суммарная площадь сечений свайного поля.

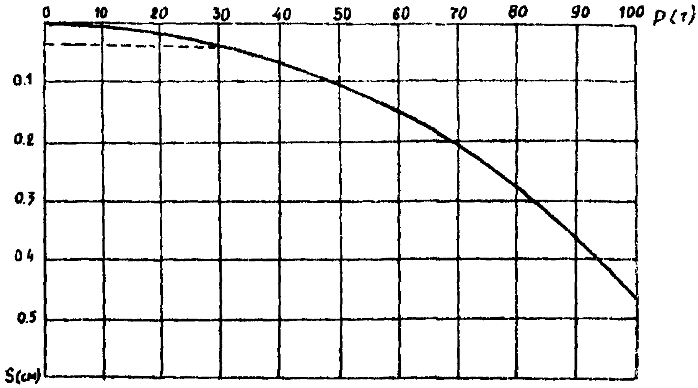


Рис. 5.29. График испытания одиночной сваи

По этим данным можно вычислить условный коэффициент постели для одной сваи

$$K_{ус} = \frac{P_{доп}}{S_{св}\, W_{доп}} = \frac{2\cdot 10^4}{1.225\cdot 10^3\cdot 3\cdot 10^{-2}} = 544\ кг/см^3.$$

Отсюда получим эквивалентный коэффициент постели для сплошного упругого основания

$$K_{экв} = \frac{K_{ус}\,\Sigma S_{св}}{\Sigma S_{фунд}} = \frac{544\cdot 17.9}{202\cdot 4} = 30.4\ кг/см^3.$$

5.3.16.3. Назначение расчетных схем.

В соответствии с опалубочными чертежами фундамента и размещением станка и нагрузок (рис. 5.26 и 5.27) задана схема дискретизации граничной поверхности фундамента (рис. 5.30). Принятый вариант разбивки позволяет с достаточной точностью определить компоненты вектора перемещений и тензора напряжений в рассматриваемых зонах. Предусматривается одновременность решения нескольких граничных задач при различном положении подвижной нагрузки. Ввиду того, что бортовые элементы (см. рис. 5.26), окаймляющие рабочую

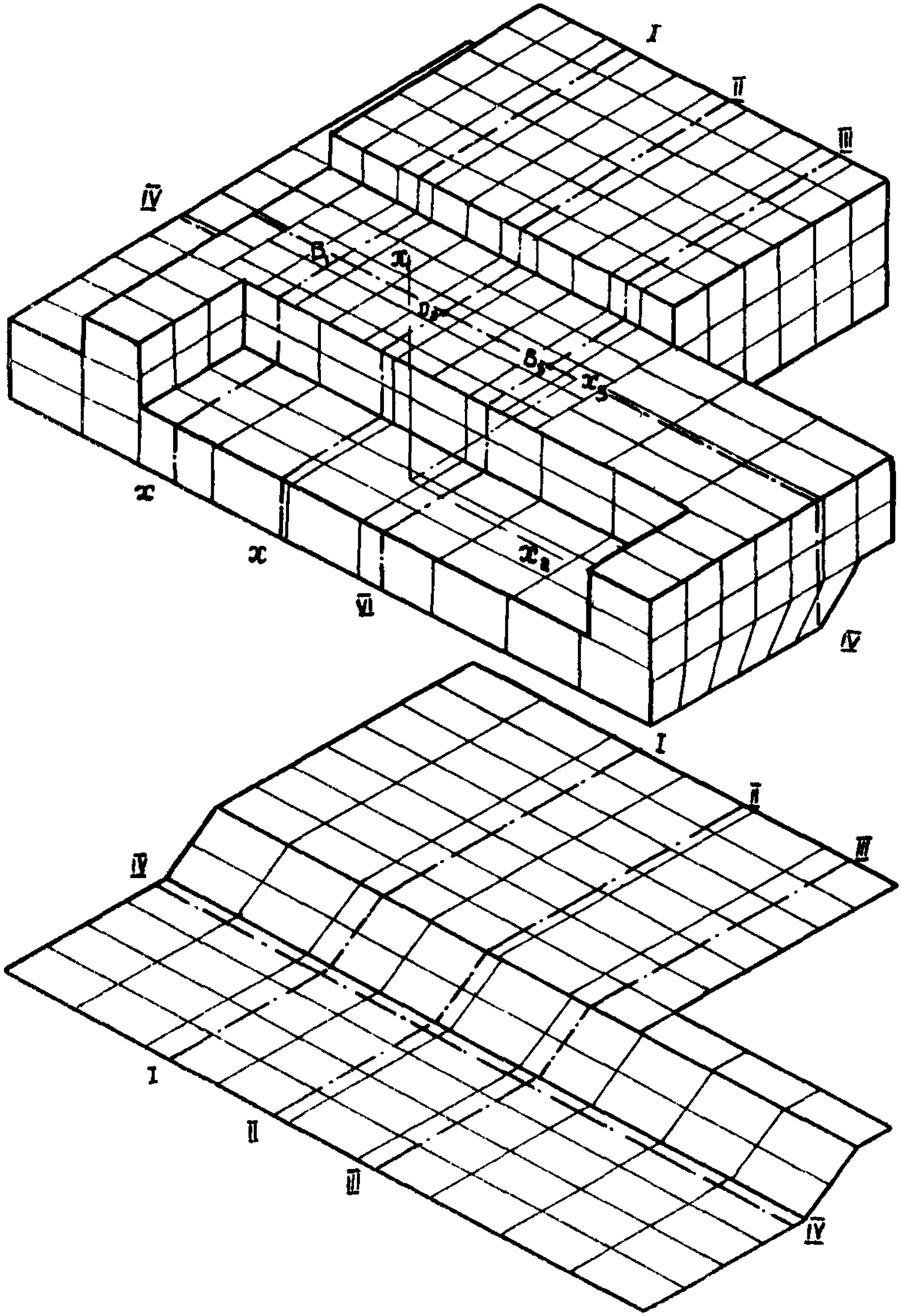


Рис. 5.30. Дискретная схема фундамента

поверхность, выполняют функции опорных конструкций настила рабочего места и не предназначены для восприятия усилий, возникающих при работе станка, в расчетной схеме они не учитываются. Аппроксимация функций неизвестных граничных компонентов напряженно-деформированного состояния осуществлялась на базисе из 368 плоских четырехугольных фрагментов (рис. 5.31). Одновременно определялись три варианта решения граничной задачи, соответствующие трем положениям внешней нагрузки Q_{cm} = 93 т, когда центр ее последовательно занимал положения B_1, B_2, B_3. Эти положения совпадают с крайней левой, средней и крайней правой возможными позициями рабочей колонки, которые она занимает при выполнении технологических операций. Во всех трех вариантах остаются неизменными величина и место приложения временной неподвижной нагрузки веса обрабатываемой детали $Q_{из}$ = 60 т. Подготовленные таким образом исходные данные для геометрического образца фундаментного массива и топология сети элементов границы позволяют найти неизвестные дискретные значения плотностей в результате решения одной системы алгебраических уравнений с тремя правыми частями. Такой алгоритм дает возможность оценить изменения компонентов напряженно-деформированного состояния фундамента в процессе работы станка, практически не увеличивая трудоемкость и затраты машинного времени на его реализацию по сравнению с расчетом при одном фиксированном положении Q_{cm}.

5.3.16.4. Исследование деформативности фундаментного массива.

При решении рассматриваемого класса задач весьма наглядно проявляется одно из основных преимуществ численно-аналитического метода потенциала по сравнению с другими численными методами: возможность получения неизвестных перемещений и реакций непосредственно на границе тела без использования их связи с компонентами напряженно-деформированного состояния внутри области. Эти неизвестные определяются в процессе решения граничной задачи. Большинство технологических требований на деформативность фундамента (5.1), (5.2) касаются относительных перемещений собственно граничной поверхности. Поэтому прямое сравнение результатов решения ряда характерных вариантов граничных задач дает исчерпывающие ответы на большую часть поставленных вопросов. Приведенные далее оценки степени деформативности фундаментного массива основаны на результатах решения алгебраических систем, сформированных из интегральных представлений перемещений в узлах аппроксимации.

На пространственных изометрических схемах (рис.5.31) показаны в виде изолиний равных перемещений u_1 решения граничных задач для двух крайних положений нагрузки Q_{cm} при $K_{экв} = 3 \cdot 10^4$ т/м^3. По этим результатам можно судить о деформациях всего тела фундамента, но так как критерии (5.1), (5.2) ограничиваются рабочими поверхностями, то есть смысл далее рассматривать более подробно лишь зоны, где необходимо удовлетворить эти требования.

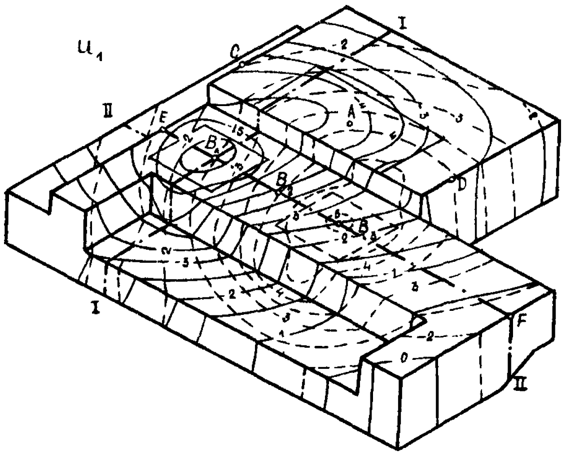


Рис. 5.31. Изолинии перемещений

На рис. 5.32 изображены изолинии вертикальных перемещений точек рабочих плоскостей фундамента под действием неподвижной нагрузки от собственного веса обрабатываемой детали $Q_{дет} = 60$ т и подвижной нагрузки от веса рабочей колонны $Q_{cm} = 93$ т, когда центр действия сил веса подвижных нагрузок B последовательно занимает положение B_1, B_2 и B_3. С целью исследования деформативности фундамента на прямой EF, проходящей через точку B (рис. 5.32), построены профили перемещений u_1.

Такой же профиль построен и на прямой CD, проходящей через условный центр приложения нагрузок обрабатываемых деталей, точку A. Совмещая полученные профили, можно проанализировать изменение величин относительных прогибов в произвольно выбранных точках при различных положениях рабочей колонны. Совмещенные профили для трех положений точки B показаны на рис. 5.33, где

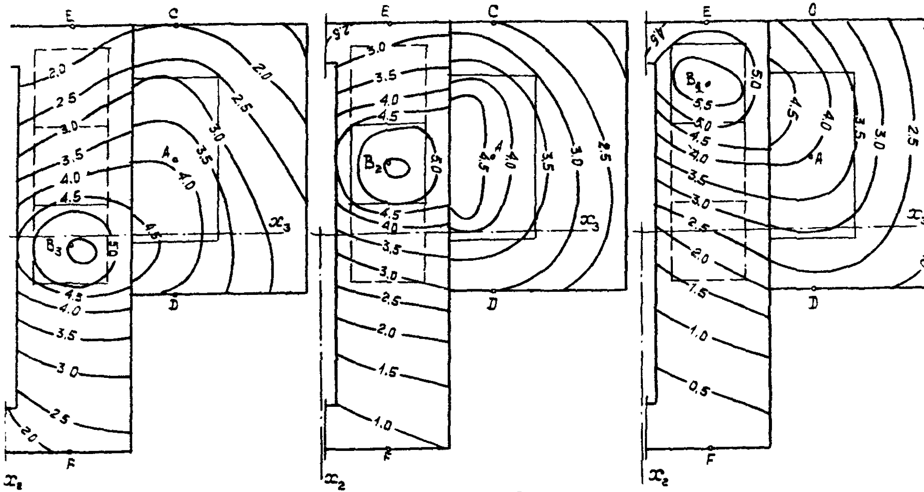


Рис. 5.32. Изолинии перемещений $u_1 \times 10^5$ м на рабочей поверхности фундамента

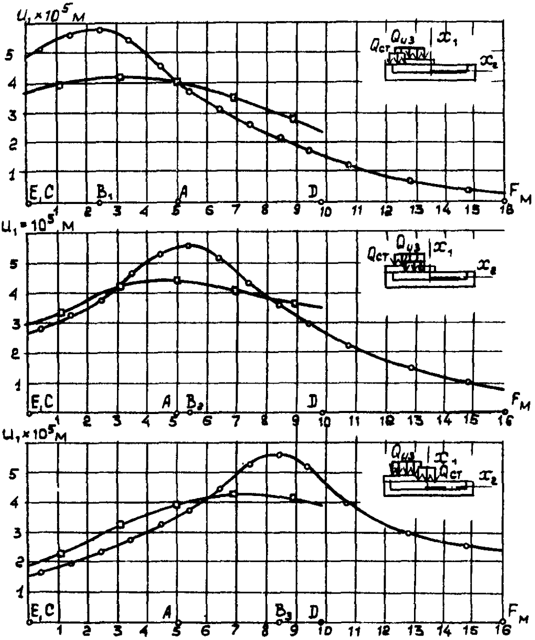


Рис. 5.33. Профили перемещений $u_1 \times 10^5$ м по прямым CD и EF

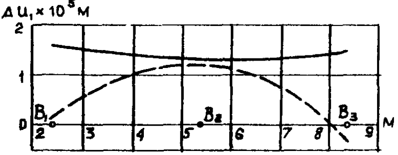


Рис. 5.34. Линии влияния Δu_1 в точке A и максимальных относительных деформаций

значения U_1 в точках, лежащих на прямой EF, обозначены "o", а на прямой CD - "□" Результаты сравнений в виде линии максимальных относительных прогибов ΔU_{1max}(сплошная линия) и линии влияния относительных прогибов для точки A_1 $(\Delta U_1(A)$ (пунктирная линия) изображены на рис. 5.34, который содержит полную информацию о выполнении условий (5.I), (5.2). Из графика ΔU_{1max} на рис. 5.34 следует, что это максимальное значение не превышает $1.6 \cdot 10^{-5}$ м. Поскольку максимально допустимый прогиб в соответствии с (5.I) составляет $\Delta U_{1max/Tp} = 5 \cdot 10^{-5}$, то степень запаса по деформативности фундамента составляет $\frac{\Delta U_{1max/Tp}}{\Delta U_{1max}} =$
$= \frac{5 \cdot 10^{-5}}{1,6 \cdot 10^{-5}} = 3,1.$

Согласно построенной на рис. 5.34 линии влияния максимальное значение прогибов на режиме фрезерной обработки детали изменяется в пределах $-0,51 \cdot 10^{-5} \leq \Delta U_1(A) \leq 1,3 \cdot 10^{-5}$ м.

Требование (5.2) также, очевидно, выполняется с большим запасом, так как даже максимальное значение относительно прогиба на линии влияния не превышает значения $1.3 \cdot 10^{-5}$ м.

Подытоживая результаты проверки фундамента, следует отметить, что данная конструкция имеет слишком бо́льшие запасы по деформации (в 3-4 раза), чем это требовалось бы соображениями технологического порядка (5.I), (5.2).

Можно сделать вывод, что и при коэффициенте постели $K_{пл}=$ $= 1 \cdot 10$ т.м$^{-3}$ технологические ограничения (5.I), (5.2) по сравнению с расчетными величинами деформаций выдерживаются с запасом более чем в 2 раза. Это позволяет еще больше снизить требуемый коэффициент постели и ближе подойти к значениям, характерным для наиболее распространенных геологических условий реальных строительных площадок и в некоторых случаях вообще отказаться от устройства сплошного свайного основания.

5.3.I6.5. Определение компонентов напряжений в теле фундамента от действия внешних нагрузок.

Для построения компонентов тензора напряжений $\sigma_{ij}(K)$ использовано тождество Сомилиана. Неизвестные плотности эластопотенциалов в этой формуле определялись из разрешающей системы алгебраических уравнений, построенной на основе интегральных представлений статических граничных условий.

Исследование характера распределения полей напряжений в пространственном фундаментном массиве проводилось по характерным сечениям I-I, II-II, расположение которых показано на рис. 5.30. Сечение I-I проходит через точки центров приложения подвижной нагрузки Q_{cm} перпендикулярно к движению рабочей колонны, а сечение II-II проходит вдоль линии движения обрабатывающего центра.

На рис. 5.35 изображены изолинии напряжений σ_{11}, на сечении II-II центр масс подвижных частей станка совпадает с точкой B_1, в поле напряжений σ_{11} присутствует источник возмущений, образованный резким изменением кривизны границы - типа входящего угла. В этой же зоне находится и источник концентрации напряжений, так как входящий угол в расчетной схеме принят абсолютно прямым без скругления или подрезки. Точное определение концентрации напряжений не производилось, поэтому значения напряжений в зонах концентрации приведены такие, которые соответствуют заданной дискретной схеме. Однако полученные результаты дают возможность оценивать предельные величины напряжений в зонах концентрации.

В напряжениях σ_{33} (сечение II-II) также проявляется эффект концентрации напряжений на входящем угле. В пространственном случае распределение напряжений σ_{33} по высоте сечения имеет хорошо выраженную нелинейность. Из этих результатов следует, что применяемая в задачах изгиба интегральная характеристика напряжений σ_{33} - изгибающий момент M_{33} (в данном случае неприемлема).

Рассмотрим теперь распределение напряжений от Q_{cm} по сечению I-I, проходящему перпендикулярно к линии движения рабочих органов стенки. Это сечение отличается от сечения II-II более высокой сложностью очертания границы, характерным для фундаментов под технологическое оборудование, ступенеобразными переходами и изменениями толщины фундаментного массива.

На рис. 5.35 показана схема распределения напряжений σ_{11} по сечению I-I в случае, когда нагрузка Q_{cm} занимает положение B_1. В рассматриваемых полях напряжений присутствуют уже два источника концентрации напряжений. Полученные результаты дают наглядное представление о перераспределении усилий по сечению I-I от действия двух нагрузок q_{cm} = 114.8 кПа и q_{gem} = 33 кПа.

Напряжения σ_{22} и σ_{33} по сечению I-I дают возможность оценить работу тела фундамента на изгиб в направлении оси x_2. Отчетливо выявлены характерные растянутые и сжатые области фундамента.

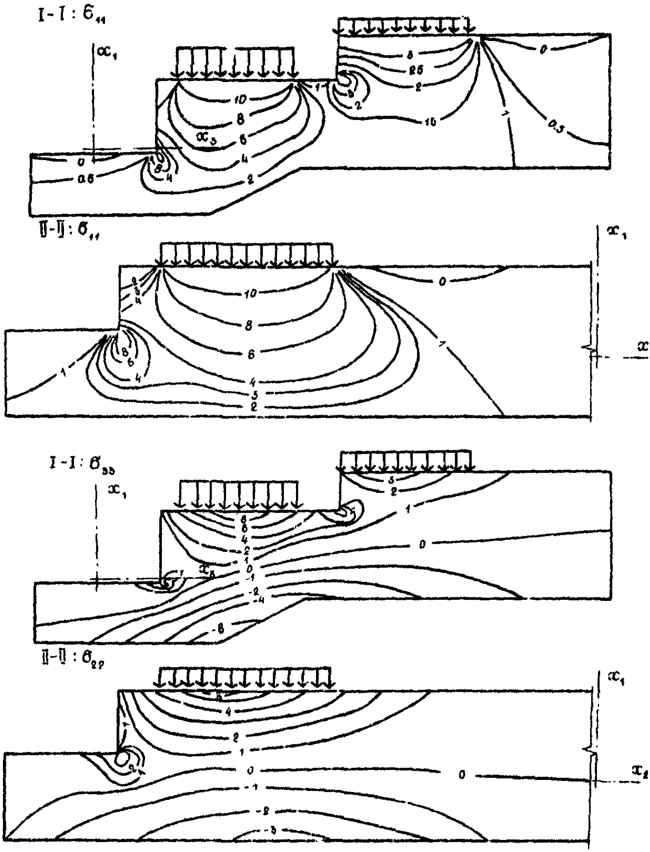


Рис. 5.35. Изолинии напряжений в сечениях фундамента

6. ПРИЛОЖЕНИЕ

6.I. Аналитическое определение компонентов интегральных представлений трехмерных задач

6.I.I. В результате прямого интегрирования компонентов интегральных представлений из (3.21), используя фундаментальное решение (3.I2), получим:

$$\int_{\Delta\Gamma} u_1^{(n)} u_1^{(n)*}(K,N)\,dS = A_1\left[(3-4\nu)\psi + z_1\varphi - z_1(\psi_3)\right]\Big/_{A_{j-1}}^{A_j};$$

$$\int_{\Delta\Gamma} u_1^{(n)} u_2^{(n)*}(K,N)\,dS = A_1\left[z_1\psi_1 \sin\varphi - z_1\psi_2\right]\Big/_{A_{j-1}}^{A_j};$$

$$\int_{\Delta\Gamma} u_1^{(n)} u_3^{(n)*}(K,N)\,dS = A_1\left[-z_1\psi_1 \cos\varphi\right]\Big/_{A_{j-1}}^{A_j};$$

$$\int_{\Delta\Gamma} u_2^{(n)} u_2^{(n)*}(K,N)\,dS = A_1\left[(3-4\nu)\psi - z_1\varphi - (z_1 - r)\sin\varphi\cos\varphi + z_1\psi_3\right]\Big/_{A_{j-1}}^{A_j};$$

$$\int_{\Delta\Gamma} u_2^{(n)} u_3^{(n)*}(K,N)\,dS = A_1\left[(-z_1\sin^2\varphi - r\cos^2\varphi)\right]\Big/_{A_{j-1}}^{A_j};$$

$$\int_{\Delta\Gamma} u_3^{(n)} u_3^{(n)*}(K,N)\,dS = A_1\Big[(3-4\nu)\psi - z_1\varphi +$$

$$+ (z_1 - r)\sin\varphi\cos\varphi + z_1\psi_3 + a\,\psi_2\Big]\Big/_{A_{j-1}}^{A_j}; \qquad (6.I)$$

где $A_1 = \left[(1-\nu)16\mu\pi\right]^{-1}$, $\psi = -z_1\varphi + z_1\psi_3 + a\psi_2$

$\psi_1 = \ln(r+\rho)z_1^{-1}$, $\psi_2 = \ln(r+z_3)h^{-1}$, $\psi_3 = \mathrm{arctg}\, z_1 z_3 (ra)^{-1}$.

$\int_{A_j}^{A_{j+1}}$ обозначает, что при подстановке пределов используются значения геометрических характеристик, соответствующих точкам A_j и A_{j+1}.

В (6.I) входят компоненты ψ_1, z_1, r, инвариантные относительно поворота координатных осей вокруг оси $z_1 \equiv n_1$.

6.I.2. Рассмотрим более подробно преобразование (6.I) при построении значений интегральных характеристик перемещений вспомогательного состояния по произвольному замкнутому контуру.

Пусть для первого члена суммы (3.21) система координат $\{z_i^j\} = \{n_i\}$ и величины перемещений по $\Delta K, A_{j-1}, A_j$ определяются выражениями (6.1). Для получения значений интегралов от перемещений вспомогательного состояния по следующему треугольному фрагменту K, A_j, A_{j+1} следует повернуть систему $\{z_i^j\}$ вокруг оси z_1^j на угол θ таким образом, чтобы z_2^{j+1} стала перпендикулярной к A_j, A_{j+1}. Произведем вычисления интегральных характеристик перемещений в новой системе координат $\{z_i^{j+1}\}$ и полученные значения их снова приведем к системе $\{z_i^j\} = \{n_i\}$, используя формулы (3.28) – (3.30). Геометрические преобразования к этим выкладкам проиллюстрированы рис. 6.1. Значения интегральных характеристик

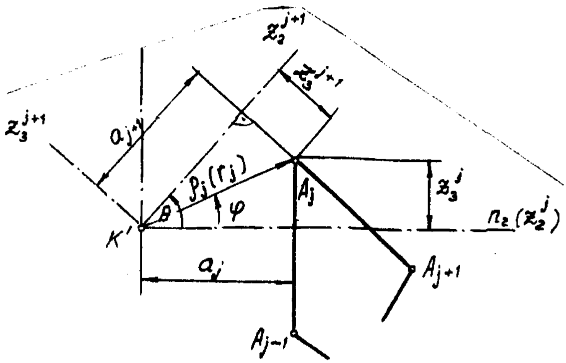


Рис. 6.1. Интегрирование на замкнутом фрагменте

перемещений по направлениям $\{n_i\}$ на $\Delta K, A_j, A_{j+1}$ можно определить выражениями:

$$\int\limits_{\Delta K, A_j A_{j+1}} u_1^{(n)} u_1^{(n)*}(K,N)\,ds = c_{1\ell}^{j+1} c_{1m}^{j+1} \int\limits_{\Delta K, A_j A_{j+1}} u_1^{(II)} u_1^{(II)*}(K,N)\,ds =$$

$$= A_1[(3-4\nu)(-z_1\varphi^A + z_1\psi_3^A + a\psi_2^A) + z_1(\varphi^A - \psi_3^A)]\Big|_{A_j}^{A_{j+1}},$$

$$\int\limits_{\Delta K, A_j A_{j+1}} u_1^{(n)} u_2^{(n)*}(K,N)\,ds = c_{1\ell}^{j+1} c_{2m}^{j+1} \int\limits_{\Delta K, A_j A_{j+1}} u_\ell^{(II)} u_m^{(II)*}(K,N)\,dS =$$

$$= \cos\theta \int\limits_{\Delta K, A_j A_{j+1}} u_2^{(II)} u_1^{(II)*}(K,N)\,ds - \sin\theta \int\limits_{\Delta K, A_j A_{j+1}} u_3^{(II)} u_1^{(II)*}(K,N)\,ds =$$

$$=A_1\{z_1\psi_1[\sin(\varphi^A-\theta)\cos\theta+\cos(\varphi^A-\theta)\sin\theta]-z_1\cos\psi_2^A\}\Big|_{A_j}^{A_{j+1}}=$$

$$=A_1 z_1[\underline{\psi_1^A\sin\varphi^A}-\cos\theta\,\psi_2^A]\Big|_{A_j}^{A_{j+1}},$$

$$\int\limits_{\Delta K,A_jA_{j+1}} u_1^{(n)}u_3^{(n)*}(K,N)\,ds=c_{1e}^{j+1}c_{3m}^{j+1}\int\limits_{\Delta K,A_jA_{j+1}} u_e^{(I)}u_m^{(I)*}(K,N)\,ds=$$

$$=\sin\theta\int\limits_{\Delta K,A_jA_{j+1}} u_2^{(I)}u_1^{(I)*}(K,N)\,ds+\cos\theta\int\limits_{\Delta K,A_jA_{j+1}} u_3^{(I)}u_1^{(I)*}(K,N)\,ds=$$

$$=A_1 z_1\{[-\cos(\varphi^A-\theta)\cos\theta+\sin(\varphi^A-\theta)\sin\theta]\psi_1^A-\sin\theta\,\psi_2^A\}\Big|_{A_j}^{A_{j+1}}=$$

$$=A_1 z_1[\underline{-\cos\varphi^A\psi_1^A}-\sin\theta\,\psi_2^A]\Big|_{A_j}^{A_{j+1}},$$

$$\int\limits_{\Delta K,A_jA_{j+1}} u_2^{(n)}u_2^{(n)*}(K,N)\,ds=c_{2e}^{j+1}c_{2m}^{j+1}\int\limits_{\Delta K,A_jA_{j+1}} u_e^{(I)}u_m^{(I)*}(K,N)\,ds=$$

$$=\cos^2\theta\int\limits_{\Delta K,A_jA_{j+1}} u_2^{(I)}u_2^{(I)*}(K,N)\,ds+\sin^2\theta\int u_3^{(I)}u_3^{(I)*}(K,N)\,ds=$$

$$-\sin\theta\cos\theta\int\limits_{\Delta K,A_jA_{j+1}} u_2^{(I)}u_3^{(I)*}(K,N)\,ds-\sin\theta\cos\theta\int\limits_{\Delta K,A_jA_{j+1}} u_3^{(I)}u_2^{(I)*}(K,N)\,ds=$$

$$=-A_1\{-4(1-\nu)z_1(\varphi^A-\psi_3^A)+4a(1-\nu)\psi_2^A-a\psi_2^A\sin^2\theta+$$

$$+[\cos(\varphi^A-\theta)\cos\theta(-\cos(\varphi^A-\theta)\sin\theta-\sin(\varphi^A-\theta)\cos\theta)+$$

$$+\sin(\varphi^A-\theta)\sin\theta(\cos(\varphi^A-\theta)\sin\theta+\sin(\varphi^A-\theta)\cos\theta)(z_1-r)]\}\Big|_{A_j}^{A_{j+1}}=$$

$$=A[-4(1-\nu)z_1(\varphi^A-\psi_3^A)+a(3-4\nu)\psi_2^A+a\,\psi_2^A\sin^2\theta-\cos\varphi^A\sin\varphi^A(z_1-r)]\Big|_{A_j}^{A_{j+1}},$$

$$\int\limits_{\Delta K,A_jA_{j+1}} u_2^{(n)}u_3^{(n)*}(K,N)\,ds=c_{2e}^{j+1}c_{3m}^{j+1}\int\limits_{\Delta K,A_jA_{j+1}} u_e^{(I)}u_m^{(I)*}(K,N)\,ds=$$

$$=\cos^2\theta\int\limits_{\Delta K,A_jA_{j+1}} u_2^{(I)}u_3^{(I)*}(K,N)\,ds-\sin^2\theta\int\limits_{\Delta K,A_jA_{j+1}} u_3^{(I)}u_2^{(I)*}(K,N)\,ds-$$

$$-\cos\theta\sin\theta\int\limits_{\Delta K_1 A_j A_{j+1}} u_3^{(\mathrm{I})} u_3^{(\mathrm{I})*}(K,N)\,ds + \cos\theta\sin\theta\int\limits_{\Delta K_1 A_j A_{j+1}} u_2^{(\mathrm{I})} u_2^{(\mathrm{I})*}(K,N)\,ds =$$

$$= A_1\{-a\psi_2^A\cos\theta\sin\theta + [(\cos(\varphi_A-\theta)\cos\theta - \sin(\varphi_A-\theta)\cos\theta)\cos(\varphi_A -$$

$$-\theta)\cos\theta - \sin(\varphi_A-\theta)\sin\theta(\cos(\varphi^A-\theta)\cos\theta - \sin(\varphi^A-\theta)\sin\theta)](z_1 -$$

$$-r)\}\Big|_{A_j}^{A_{j+1}} = A_1[-a\psi_2^A\sin\theta\cos\theta + (z_1-r)\cos^2\varphi^A]\Big|_{A_j}^{A_{j+1}},$$

$$\int\limits_{\Delta K_1 A_j A_{j+1}} u_3^{(n)} u_3^{(n)*}(K,N)\,ds = c_{3\ell}^{j+1} c_{3m}^{j+1}\int\limits_{\Delta K_1 A_j A_{j+1}} u_\ell^{(\mathrm{I})} u_m^{(\mathrm{I})*}(K,N)\,ds =$$

$$= \cos^2\theta\int\limits_{\Delta K_1 A_j A_{j+1}} u_3^{(\mathrm{I})} u_3^{(\mathrm{I})*}(K,N)\,ds + \sin^2\theta\int\limits_{\Delta K_1 A_j A_{j+1}} u_2^{(\mathrm{I})} u_2^{(\mathrm{I})*}(K,N)\,ds +$$

$$+ \cos\theta\sin\theta\int\limits_{\Delta K_1 A_j A_{j+1}} u_2^{(\mathrm{I})} u_3^{(\mathrm{I})*}(K,N)\,ds + \sin\theta\cos\theta\int\limits_{\Delta K_1 A_j A_{j+1}} u_3^{(\mathrm{I})} u_2^{(\mathrm{I})*}(K,N)\,ds =$$

$$= A_1\{-4(1-\nu)z_1(\varphi^A-\psi_3^A) + a(3-4\nu)\psi_2^A + a\psi_2^A\cos^2\theta +$$

$$+(z_1-r)[\cos^2\theta\cos(\varphi^A-\theta)\sin(\varphi^A-\theta) - \sin^2\theta\cos(\varphi^A-\theta)\sin(\varphi^A-\theta) -$$

$$-\sin\theta\cos\theta\sin^2(\varphi^A-\theta) + \sin\theta\cos\theta\cos^2(\varphi^A-\theta)]\}\Big|_{A_j}^{A_{j+1}} =$$

$$= A_1[-4(1-\nu)z_1(\varphi^A-\psi_3^A) + a(3-4\nu)\psi_2^A + a\psi_2^A\cos^2\theta -$$

$$\underline{-\cos\varphi^A\sin\varphi^A(z_1-r)}]\Big|_{A_j}^{A_{j+1}}. \qquad (6.2)$$

В (6.2) функции ψ_1^A, ψ_2^A, φ_3^A выражаются теми же соотношениями, что и в (6.I). Геометрические параметры их соответствуют значениям a, z_2, z_3 точек подстановки пределов A_j в системе координат $\{z_i^{j+1}\}$ для стороны многоугольника $A_j A_{j+1}$.

6.I.3. Компоненты вспомогательного состояния $u_\ell^{(n)} u_k^{(n)*}(K,N)$ (6.I) для элементарного базисного треугольника $\Delta K_1 A_{j-1} A_j$ содержат элементы, которые у каждой вершины граничного многоугольника A_i не зависят от ориентации систем координат $\{z_i'\}$ (они подчеркнуты в формулах (6.I) . После аналогичного вычисления интегральных характеристик $u_\ell^{(n)}u_\kappa^{(n)}(K,N)$ для следующего по направлению обхода вершин $A_1 A_2 \ldots A_j$ треугольника K, A_j, A_{j+1} у вершины A_j образуются такие же инвариантные составляющие (в (6.2) они также подчеркнуты).

6.I.4. При подстановке пределов интегрирования и суммирования вкладов отдельных треугольников по формулам (3.2I) эти инварианты взаимно уничтожаются. Поэтому для вычисления перемещений вспомогательного состояния по замкнутому граничному многоугольнику целесообразно воспользоваться следующей матрицей интегральных характеристик:

$$A_1^{-1}\int_{\Delta\Gamma} u_i^{(z)} u_j^{(z)*}(K,N)\,dS =$$

$$\left\| \begin{matrix} 2(1-2\nu)z_1(\psi_3-\varphi)+ & -z_1\psi_2 & 0 \\ +(3-4\nu)z_2\psi_2^A & & \\ & & \\ — & 4(1-\nu)z_1(\psi_3-\varphi)+ & -0{,}5r \\ & +(3-4))z_2\psi_2 & \\ & & \\ — & — & 4(1-\nu)z_1(\psi_3-\varphi)+ \\ & & +4(1-\nu)z_2\psi_2 \end{matrix} \right\|_{A_{j-1}}^{A_j} \qquad (6.3)$$

6.1.5. Компоненты напряжений вспомогательного состояния действия единичной сосредоточенной силы определяются выражениями:

$$A_2^{-1}\int_{\Delta\Gamma} u_1^{(z)}\sigma_{ij}^{(z)}(K,N)\,dS =$$

$$\left\| \begin{matrix} -2(1-\nu)(\varphi-\psi_3) & (1-2\nu)\psi_2+ & 0 \\ -z_1z_2z_3r^{-1}h^{-2} & +z_1^2z_3r^{-1}h^{-2} & \\ & & \\ - & -2\nu(\varphi-\psi_3) & -0{,}5z_1r^1 \\ & z_1z_2z_3r^{-1}r^{-2} & \\ & & \\ & — & -2\nu(\varphi-\psi_3) \end{matrix} \right\|_{A_{j-1}}^{A_j}$$

$$A_2^{-1}\int\limits_{\Delta\Gamma} u_2^{(z)}\,\sigma_{ij}^{(z)*}(K,N)\,dS =$$

$$= \left\| \begin{matrix} -(1-2\nu)\psi_2 + \\ +z_1^2 z_3 r^{-1} h^{-2} & \begin{matrix} -2(1-\nu)(\varphi-\psi_3) + \\ +z_1 z_2 z_3 r^{-1} h^{-2} \end{matrix} & -0{,}5 z_1 r^{-1} \\ — & \begin{matrix} (3-2\nu)\psi_2 + 0{,}5 z_3 r^{-1} - \\ -z_1^2 z_3 r^{-1} h^{-2} \end{matrix} & -0{,}5 z_2 r^{-1} \\ — & — & \begin{matrix} 2\nu\,\psi_2 - \\ -0{,}5 z_3 r^{-1} \end{matrix} \end{matrix} \right\|_{A_{j-1}}^{A_j}$$

$$A_2^{-1}\int\limits_{\Delta\Gamma} u_3^{(z)}\,\sigma_{ij}^{(z)*}(K,N)\,dS =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 0 & -0{,}5 z_1 r^{-1} & -2(1-\nu)(\varphi-\psi_3) \\ — & -0{,}5 z_2 r^{-1} & 2(1-\nu)\psi_2 - 0{,}5 z_3 r^{-1} \\ — & — & 0{,}5 z_2 r^{-1} \end{matrix} \right\|_{A_{j-1}}^{A_j} \qquad (6.4)$$

6.I.6. Компоненты усилий исходного вспомогательного состояния, построенного для представления перемещений $u_e^{(\omega)}(K)$ основного состояния, определяются в алгебраических аналогах (3.2I) формулами типа первообразных (3.2I) при объединении проекций в соответствии с (3.I6).

6.I.7. Аналогичным образом строятся выражения, не имеющие инвариантных составляющих, для вычисления дискретных интегральных характеристик второго вспомогательного состояния, сформированного для представления напряжений $\sigma_{me}^{(\omega)}(K)$ (3.II). В этом случае интегральные значения перемещений $u_i^{(n)}(K,N)$ как составляющих (3.2I) находятся из условий взаимности (3.I9), а усилия - на основе следующих соотношений:

$$A_3^{-1}\int\limits_{\Delta\Gamma} \sigma_{ij}^{(z)} P_1^{(z)*}(K,N)\,dS =$$

$$
= \left\| \begin{array}{ccc}
-z_2 z_3 r^{-1} h^{-2} \times & z_3 z_1 r^{-1} h^{-2} \times & \\
\times (1+2z_2^2 h^{-2}+z_1^2 r^{-2}) & \times(1-2z_2^2 h^{-2}+z_1^2 r^{-2}) & 0 \\
 & z_2 z_3 r^{-1} h^{-2} \times & 0{,}5(1-2)r^{-1}- \\
\text{—} & \times(1-2z_2^2 h^{2}+z_1^2 r^{-2}) & -0{,}5z_1^2 r^{-3} \\
\text{—} & \text{—} & -2\nu z_2 z_3 r^{-1} h^{-2}
\end{array} \right\|_{A_{j-1}}^{A_j}
$$

$$
A_3^{-1}\int_{\Delta\Gamma} \sigma_{ij}^{(z)} P_2^{(z)*}(K,N)\, ds =
$$

$$
= \left\| \begin{array}{ccc}
z_1 z_3 r^{-1} h^{2} \times & z_2 z_3 r^{-1} h^{-2} \times & 0{,}6\nu r^{-1}- \\
\times(1-2z_2^2 h^{-2}+z_1^2 r^{-2}) & \times(1-2z_2^2 h^{-2}+z_1^2 r^{-2}) & -0{,}5z_1^2 r^{-3} \\
 & z_1 z_3 h^{-1} h^{-2} \times & \\
 & \times(1+2z_2^2 h^{-2}-z_1^2 r^{-2})+ & -0{,}5z_1 z_2 r^{-3} \\
 & +0{,}5 z_1 z_3 r^{-3} & \\
 & & 2\nu z_1 z_3 r^{-1} h^{-2} \\
 & & -0{,}5z_1 z_3 r^{-3}
\end{array} \right\|_{A_{j-1}}^{A_j}
$$

$$
A_3^{-1}\int_{\Delta\Gamma} \sigma_{ij}^{(z)} P_3^{(z)*}(K,N)\, ds =
$$

$$
= \left\| \begin{array}{ccc}
0 & 0{,}5\nu r^{-1}- & -(1-\nu)z_2 z_3 r^{-1} h^{-2}+ \\
 & -0{,}5z_1^2 r^{-3} & \\
\text{—} & -0{,}5z_1 z_2 r^{-3} & (1-\nu)z_1 z_3 r^{-1} h^{-2}- \\
 & & -0{,}5 z_1 z_3 r^{-3} \\
\text{—} & \text{—} & 0{,}5 z_1 z_2 r^{-3}
\end{array} \right\|_{A_{j-1}}^{A_j} \qquad (6.5)
$$

6.2. Аналитическое определение компонентов интегральных представлений двумерных задач

6.2.1. Вычисление усилий и перемещений по неискривленному элементарному базису $A_j A_{j+1}$ (рис.6.2) принципиально не отличается от алгоритма определения этих характеристик в трехмерной задаче: при повороте системы $\{\alpha_i\}$ в точке K на угол θ переходим к системе координат $\{n_i\}$, в которой и происходит вычисление эластопотенциалов.

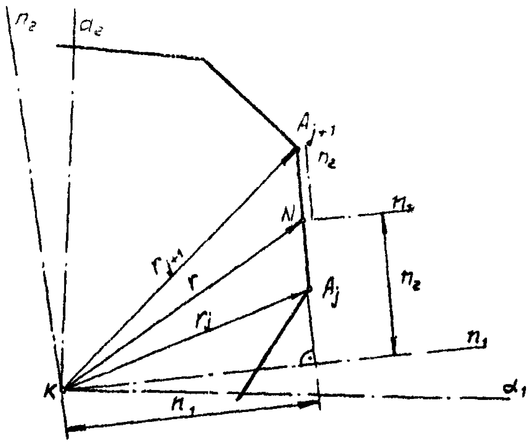


Рис. 6.2. Приведение к базисной системе интегрирования в двумерных задачах

6.2.2. Интегральные характеристики перемещений напряжений исходного вспомогательного состояния (3.13, 3.14), используемого для интегральных представлений перемещений (3.11), (3.21) двумерных объектов, определяются выражениями:

$$\int_{\Delta l} u_1^{(n)} u_1^{(n)*}(K,N)\,dn_2 = H[(1-\varkappa)n_1\varphi_A + \varkappa n_2(1-\ln r)]\Big|_{A_j}^{A_{j+1}};$$

$$\int_{\Delta l} u_1^{(n)} u_2^{(n)*}(K,N)\,dn_2 = H n_1 \ln r\Big|_{A_j}^{A_{j+1}};$$

$$\int_{\Delta l} u_2^{(n)} u_2^{(n)*}(K,N)\,dn_2 = H[(1+\varkappa)(n_2 - n_1\varphi_A) - \varkappa n_2 \ln r]\Big|_{A_j}^{A_{j+1}},$$

$$\int_{\Delta l} u_1^{(n)} \sigma_{11}^{(n)*}(K,N)\,dn_2 = -\mu H[(1+\varkappa)\varphi_A + 2n_1 n_2 r^{-2}]\Big|_{A_j}^{A_{j+1}};$$

$$\int_{\Delta l} u_1^{(n)} \sigma_{12}^{(n)*}(K,N)\,dn_2 = \mu H[(1-\varkappa)\ln r + 2n_1^2 r^{-2}]\Big|_{A_j}^{A_{j+1}};$$

$$\int_{\Delta l} u_2^{(n)} \sigma_{11}^{(n)*}(K,N)\,dn_2 = \mu H[-(1-\varkappa)\ln r + 2n_1^2 r^{-2}]\Big|_{A_j}^{A_{j+1}};$$

$$\int_{\Delta l} u_2^{(n)} \sigma_{12}^{(n)*}(K,N)\,dn_2 = \mu H[-(1+\varkappa)\varphi_A + 2n_1 n_2 r^{-2}]\Big|_{A_j}^{A_{j+1}};$$

$$\int_{\Delta l} u_2^{(n)} \sigma_{22}^{(n)*}(K,N)\,dn_2 = \mu H[-(3+\varkappa)\ln r - 2n_1^2 r^{-2}]\Big|_{A_j}^{A_{j+1}}; \qquad (6.6)$$

где: $\varphi_A = \mathrm{arctg}\, n_2 n_1^{-1}$.

Интегральные характеристики усилий $u_i^{(n)} R^{(n)*}$ на границе этого вспомогательного состояния определяются по формулам (3.16).

6.2.3. Компоненты напряжений (3.15) и усилий (3.12) второго вспомогательного состояния, образованного для интегральных представлений напряжений, вычисляются с помощью следующий формул:

$$\int_{\Delta l} \sigma_{11}^{(n)} \sigma_{11}^{(n)*}(K,N)\,dn_2 = 4\mu^2 H n_2 r^{-2}(1+2n_1^2 r^{-2});$$

$$\int_{\Delta l} \sigma_{11}^{(n)} \sigma_{12}^{(n)*}(K,N)\,dn_2 = 4\mu^2 H n_1 r^{-2}(1-2n_1^2 r^{-2});$$

$$\int_{\Delta l} \sigma_{11}^{(n)} \sigma_{22}^{(n)*}(K,N)\,dn_2 = 4\mu^2 H n_2 r^{-2}(1-2n_1^2 r^{-2});$$

$$\int_{\Delta l} \sigma_{12}^{(n)} \sigma_{12}^{(n)*}(K,N)\,dn_2 = 4\mu^2 H n_2 r^{-2}(1-2n_1^2 r^{-2});$$

$$\int_{\Delta l} \sigma_{22}^{(n)} \sigma_{22}^{(n)*}(K,N)\,dn_2 = 4\mu^2 H n_2 r^{-2}(-3+2n_1^2 r^{-2}). \qquad (6.7)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Верюжский Ю.В. Расчет пластин методом интегральных уравнений. - В кн.:Численные методы расчета пространственных конструкций. - Киев: 1968, с.223-245.

2. Верюжский Ю.В. Метод интегральных уравнений в механике деформируемых твердых тел. - Киев: КИСИ, 1977. - 120с.

3. Верюжский Ю.В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. - Киев: Вища школа, 1978.- 182с.

4. Верюжский Ю.В. Численно-аналитический метод потенциала в статических задачах строительной механики.- В кн.: Инженерные проблемы строительной механики. - М.:1980. - С.16-32.

5. Верюжский Ю.В., Бесков А.Н. Исследование сложных трехмерных конструкций методами потенциала и голографии. - В кн.: Труды ин-та инженеров ж.-д. транспорта. Вып. 669. - М.: 1980.- С. 139-152.

6. Верюжский Ю.В., Вусатюк А.И., Петренко А.Я., Савицкий В.В. Исследование прочности сложных континуальных конструкций численно-аналитическим методом потенциала. - В кн.: IX Международный конгресс по применению математики в инженерных исследованиях, Кн. 2. - Веймар; 1981. - С. 37-40.

7. Верюжский Ю.В., Вусатюк А.И., Петренко А.Я. и др. Пакет прикладных программ по расчету двумерных объектов в упругой и физически-нелинейной постановках. -М.: Государственный фонд алгоритмов и программ ВНТИЦ, № П004437, 1980.

8. Верюжский Ю.В., Вусатюк А.И., Петренко А.Я., Савицкий В.В. Пакеты прикладных программ "Потенциал" для прочностных исследований конструкций машин и сооружений. - Киев: Минвуз УССР, 1982. - 18с.

9. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Бурчуладзе Т.В., Башелейшвили М.О. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. - М. : Наука, 1976. - 664с.

10. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. Ч. I.- Киев: АН УССР, 1963. - 354с.

11. Александров А.Я. Решение основных задач теории упругости путем численной реализации метода интегральных уравнений. - В кн.: Успехи механики деформируемых сред. - М. ; 1975. -С.3-24.

12. Вайнберг Д.В., Синявский А.Л. Расчет оболочек. - Киев: Госстройиздат УССР, 1959. - 119с.

13. Копейкин Ю.Д. Прямое решение двух- и трехмерных краевых задач теории упругости и пластичности при помощи сингулярных

интегральных уравнений метода потенциала. - В кн: Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск: 1974, т. I5, № 2. - С. 46-56.

I4. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. - М.: Наука, I98I. - 688с.

I5. Новацкий В. Теория упругости. - М. : Мир, I975. - 872с.

I6. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике / Под ред. Т. Круз, Ф. Риццо. - М. : Мир, I978. - 2I5с.

I7. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. - М. : Мир, I982. - 248с.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ДАННЫЕ

РАЗРАБОТАНЫ Киевским ордена Трудового Красного Знамени инженерно-строительным институтом

РУКОВОДИТЕЛЬ РАЗРАБОТКИ д.т.н.проф. Ю.В.Верюжский

ИСПОЛНИТЕЛИ: д.т.н. проф. Ю.В.Верюжский, к.т.н. А.И.Вусатюк, к.т.н. А.Я.Петренко, к.т.н. В.В.Савицкий (ответственный исполнитель)

УТВЕРЖДЕНЫ И ВВЕДЕНЫ В ДЕЙСТВИЕ Приказом ВНИИНМАШ № 274 от 3.IX.1987 г.

Содержание

Стр.

Расчеты и испытания на прочность

Метод интегральных уравнений и программы расчета на ЭВМ плоских и пространственных элементов конструкций

Рекомендации

Р 50-54

Редактор Волкова А.И.

Мл.редактор Еремеева Т.В.

ВНИИНМАШ Госстандарта СССР

Ротапринт ВНИИНМАШ 123007 Москва, ул.Шеногина, 4

Тираж 300 экз. Объем 5 уч.-изд.л. Заказ № 767-88-I

Цена 2 р.