ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ
СОЮЗА ССР

ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА

ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ. МЕТОД ВЕРОЯТНОСТНЫХ СЕТОК

ГОСТ 11.008–75
(СТ СЭВ 3542–82)

Издание официальное

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР ПО СТАНДАРТАМ
Москва

УДК 658.562.012.7 : 006.354 Группа Т59

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ СОЮЗА ССР

Прикладная статистика

ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ. МЕТОД ВЕРОЯТНОСТНЫХ СЕТОК

Applied statisticas. Graphic methods of data processing. Use of probability papers

ГОСТ 11.008—75*

(СТ СЭВ 3542—82)

Постановлением Государственного комитета стандартов Совета Министров СССР от 18 сентября 1975 г. № 2434 срок введения установлен

с 01.07.76

Настоящий стандарт устанавливает правила определения оценок статистических характеристик исследуемых объектов с помощью графического метода вероятностных сеток при статистической обработке данных, подчиняющихся одному из четырех распределений: нормальному, экспоненциальному, логарифмически нормальному и Вейбулла, и полученных из полностью определенных выборок.

Настоящий стандарт соответствует СТ СЭВ 3542—82.

(Измененная редакция, Изм. № 1).

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Вероятностная сетка для графического определения оценок характеристик для конкретного распределения вероятностей представляет собой прямоугольную сетку, на которой масштаб выбран таким образом, чтобы график функции этого распределения, построенный на сетке, представлял собой прямую линию.

Основанием для построения вероятностных сеток является целесообразное преобразование одной или обеих прямоугольных координат $\{ x, F(x) \}$ графика функции распределения $F(x)$, проведенное таким образом, чтобы взаимная зависимость обеих новых преобразованных переменных стала линейной.

Издание официальное

* *Переиздание декабрь 1984 г. с Изменением № 1, утвержденным в ноябре 1983 г.; Пост. № 5102 от 31.10.83 (ИУС № 2—84 г.)*

Для выборки объемом n из значений случайной величины X на вероятностную сетку для данного вида распределения наносят точки эмпирической функции распределения $\hat{F}(x)$. Затем по этим точкам проводят прямую так, чтобы нанесенные точки отклонялись от нее как можно меньше.

1.2. В табл. 1—4 приведены данные, на основании которых строят вероятностную сетку для каждого из указанных распределений вероятностей. Данные в этих таблицах рассчитаны на длину шкалы 300 мм. С помощью пропорционального расчета можно построить шкалы любых размеров.

1.3. Вероятностной сеткой пользуются в основном для графического определения оценок параметров распределения.

Одновременно с определением параметров выполняют графическую проверку соответствия эмпирического распределения теоретическому.

1.4. Если нанесенные эмпирические точки мало отклоняются от проведенной прямой, то это свидетельствует о том, что опытные данные не противоречат тому виду распределения, для которого была построена сетка.

При проведении этой проверки необходимо учитывать, что на концах выборки опытные точки могут больше отклоняться от прямой, чем в средней части графика.

1.5. Если на вероятностной сетке не получается прямая, то отвергается гипотеза о выбранном виде распределения.

1.6. Оценки параметров предполагаемого распределения и некоторые статистические характеристики определяют при помощи точек пересечения аппроксимирующей прямой с соответствующими осями координат.

Примечание. Для получения более точных оценок параметров следует использовать ГОСТ 11.004—74, ГОСТ 11.005—74, ГОСТ 11.007—75 и ГОСТ 11.009—79 в зависимости от вида распределения наблюдений.

1.1.—1.6. **(Измененная редакция, Изм. № 1).**

2. ГРАФИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. Точечная оценка функции распределения.

2.1.1. Основной вероятностной характеристикой случайной величины X является теоретическая функция распределения $F(x)$, информацию о которой дает эмпирическая функция распределения $\hat{F}(x)$.

2.1.2. При проведении прямой по нанесенным точкам (полученным экспериментальным путем) графика эмпирической функции распределения получают графическую оценку теоретической функции распределения $F(x)$.

2.1.3. Если объем выборки n не превосходит 30, исходными данными являются величины x_1, x_2, x_3, . . . , x_n. Эти величины соответствуют значениям исследуемой случайной величины X, полученным при независимом наблюдении случайной выборки объемом n. Предполагается, что величины x_i расположены в порядке неубывания, так что справедливы следующие неравенства

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n,$$

тогда оценку $\widehat{F}(x_i)$ находят по формуле

$$\widehat{F}(x_i) = \frac{i}{n+1} \; (i=1,2,\ldots,n). \quad (1)$$

2.1.4. Если объем выборки $n>30$, рекомендуется применять группировку данных. Выбирают числа x^* и x^{**} так, чтобы $x^* \leqslant x_{\min}$, $x^{**} \geqslant x_{max}$, и интервал $[x^*, x^{**}]$ разбивают на k классов равной длины h, где

$$h = \frac{x^{**} - x^*}{k}. \quad (2)$$

Величины x^* и x^{**} рекомендуется выбирать так, чтобы значение h, найденное по формуле (2), было удобным для вычислений (см. приложение 1, пример 1).

Число точек в j-м классе ($j=1$, . . . , k) обозначают n_j:

для $30<n \leqslant 200$ принимают значения

$$7<k \leqslant 20; \quad (3)$$

для $200<n<1000$ принимают значения

$$20<k<40. \quad (4)$$

Примечание. Если внутрь j-го класса попало n'_j точек, а внутрь $(j+1)$-го — n'_{j+1} точек выборки, причем на границу этих классов попало l точек выборки, то полагают:

$$n_j = n'_j + \frac{l}{2}, \quad (5)$$

$$n_{j+1} = n'_{j+1} + \frac{l}{2}. \quad (6)$$

Таким образом, из точки на границе классов в смежные классы относят по $^1/_2$ точки.

2.1.5. После группировки данных эмпирическую функцию распределения в точках, соответствующих серединам классов, оценивают по формуле:

$$\widehat{F}(x_{(m)}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{n+1}, \quad (7)$$

где $x_{(m)}$ — середина m-го класса,

$$m=1,2,\ldots,k;$$

k — число классов равной длины;

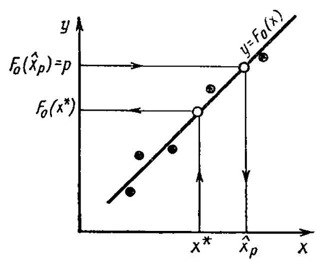
n_j — частота в j-ом классе (определяется по п. 2.1.4).

2.2. Точечная оценка статистических характеристик

2.2.1. На построенной для определенного распределения вероятностной сетке, содержащей нанесенные точки $\left\{x_i,\ \hat{F}(x_i)\right\}$ при $n \leqslant 30$ (п. 2.1.3) и $\left\{x_{(m)},\ \hat{F}(x_{(m)})\right\}$ при $n>30$, (п. 2.1.5), проводят прямую $y=F_0(x)$, наилучшим образом приближающуюся к этим точкам.

Статистические характеристики оцениваются следующим образом.

На шкале x выбирают определенное значение x^*, которое представляет собой абсциссу точки на прямой $y=F_0(x)$. Оценкой значения функции распределения $F_0(x^*)$ является ордината рассматриваемой точки прямой (см. чертеж).



$\left\{x_i,\ \hat{F}(x_i)\right\}$ — нанесенные точки графика эмпирической функции распределения;

$y=F_0(x)$ — прямая, проведенная по точкам;

x^* — выбранное определенное значение;

$F_0(x^*)$ — оценка функции распределения (по выбранному определенному значению x^*);

$F_0(\hat{x}_p)=p$ — выбранное определенное значение;

$\hat{x}_p$ — оценка 100 p %-ной квантили.

2.2.2. При оценке 100 p %-ной квантили на оси ординат (см. чертеж) выбирают определенное значение $F_0(\hat{x}_p)=p$ и на оси абсцисс находят соответствующее значение $\hat{x}_p$. Оценкой 100 р %-ной квантили является значение $\hat{x}_p$.

Разд. 2 **(Измененная редакция, Изм. № 1).**

3. ПОСТРОЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ СЕТОК И ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ И СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ОСНОВНЫХ ВИДОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

3.1. Нормальное распределение

3.1.1. Случайная величина X считается распределенной по нормальному закону, если ее функция распределения имеет вид

$$F(x,m,\sigma)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \qquad (8)$$

где

$$\Phi(y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\varphi(v)dv=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y}e^{-\frac{v^2}{2}}dv,$$

причем $y=\frac{x-m}{\sigma}$ для $-\infty<x<+\infty$;

m — среднее значение;

σ — среднее квадратическое отклонение.

Вероятностная сетка для нормального распределения содержит на оси абсцисс равномерную шкалу и по оси ординат значения y, которые пропорциональны квантилям нормированной центрированной функции нормального распределения (черт. 1, справочное приложение 2, см. бандероль).

3.1.2. Принимаем, что $S_x(x)$ обозначает абсциссу точки, соответствующей значению x, и $S_y(F)$ — ординату точки, соответствующей значению F.

Отношение $\frac{S_x(x)}{x}$ постоянно, называется коэффициентом масштаба и обозначается K_x.

3.1.3. Коэффициент масштаба K_x для оси абсцисс вычисляют по формуле

$$K_x=\frac{L}{x_{\max}-x_{\min}}, \qquad (9)$$

где L — ширина графика, мм;

$x_{\max}$, $x_{\min}$ — соответственно наименьший и наибольший элемент выборки

Примечание. В этом и последующих подразделах величину L следует выбирать в миллиметрах так, чтобы значение вычисляемого коэффициента K_x было удобным для остальных вычислений.

3.1.4. Для выбора масштаба по оси ординат задаются

$$F_{\min}=0{,}0013,\ F_{\max}=0{,}9987.$$

В случае нормального распределения им соответствуют значения

$$y_{\min}=-3{,}000,\ y_{\max}=+3{,}000,$$

а величину $S_y(F)$, откладываемую по оси ординат в миллиметрах, вычисляют по формуле

$$S_y(F)=\frac{H}{6{,}0000}\,y, \tag{10}$$

где H — длина шкалы по оси ординат (в миллиметрах), т. е. высота графика;

$y=U_p(F)$ — квантиль нормированного центрированного нормального распределения, соответствующая значению F.

Если $H=300$ мм, то $S^0_y(F)=50\,y=50\,U_p(F)$. Значения $S^0_y(F)$ в зависимости от F для этого случая приведены в табл. 1.

Для $F<0{,}5$ применяют формулу

$$S_y(F)=-S_y(1-F). \tag{11}$$

Таблица 1

Вероятностная шкала для нормального распределения

$H=300$

F	y	$S^0_y(F)$, мм	F	y	$S^0_y(F)$, мм
0,50	0,00	0,0	0,79	0,80	40,0
0,52	0,05	2,5	0,80	0,85	42,5
0,54	0,10	5,0	0,82	0,90	45,0
0,56	0,15	7,5	0,83	0,95	47,5
0,58	0,20	10,0	0,84	1,00	50,0
0,60	0,25	12,5	0,85	1,05	52,5
0,62	0,30	15,0	0,86	1,10	55,0
0,64	0,35	17,5	0,87	1,15	57,5
0,66	0,40	20,0	0,88	1,20	60,0
0,67	0,45	22,5	0,89	1,25	62,5
0,69	0,50	25,0	0,903	1,30	65,0
0,70	0,52	26,0	0,912	1,35	67,5
0,71	0,55	27,5	0,919	1,40	70,0
0,73	0,60	30,0	0,927	1,45	72,5
0,74	0,65	32,5	0,933	1,50	75,0
0,76	0,70	35,0	0,939	1,55	77,5
0,77	0,75	37,5	0,945	1,60	80,0

Продолжение табл. 1

F	y	$S_y^0(F)$, мм	F	y	$S_y^0(F)$, мм
0,951	1,65	82,5	0,992	2,40	120,0
0,955	1,70	85,0	0,993	2,45	122,5
0,960	1,75	87,5	0,9938	2,50	125,0
0,964	1,80	90,0	0,9946	2,55	127,5
0,968	1,85	92,5	0,9953	2,60	130,0
0,971	1,90	95,0	0,9960	2,65	132,5
0,974	1,95	97,5	0,9965	2,70	135,0
0,977	2,00	100,0	0,9970	2,75	137,5
0,980	2,05	102,5	0,9974	2,80	140,0
0,982	2,10	105,0	0,9978	2,85	142,5
0,984	2,15	107,5	0,9981	2,90	145,0
0,986	2,20	110,0	0,9985	2,95	147,5
0,988	2,25	112,5	0,9987	3,00	150,0
0,989	2,30	115,0			
0,991	2,35	117,5			

Примечание. Для $F<0{,}5$:

$$S_y(F) = -S_y(1-F).$$

Для длины шкалы $H \neq 300$ мм величину $S_y(F)$ вычисляют по формуле

$$S_y(F) = \frac{H}{300} S_y^0(F), \qquad (12)$$

где $S_y(F)$ — значение ординаты точек F для шкалы с произвольной длиной H, мм;

$S^0_y(F)$ — значение ординаты точек F для шкалы длиной $H=300$ мм (табл. 1), мм.

3.1.5. После нанесения значений точечных оценок функции распределения $\widehat{F}(x_i)$ строят график прямой $F_0(x)$ (п. 2.2.1).

Оценку параметра m (среднего значения) определяют при помощи абсциссы точки A на прямой по формуле

$$\widehat{m} = \pm \frac{OA}{K_x}, \qquad (13)$$

где O — начало координат;

A — точка пересечения прямой с осью абсцисс.

Примечание. В формуле (13) OA — расстояние от точки O до точки A, мм; расстояние OA берется со знаком «плюс», если точка A лежит правее точки O на оси абсцисс, и со знаком «минус», если она лежит левее, т. е. соответствует отрицательной абсциссе.

Если начало координат O не помещено на чертеже, то OA вычисляют по формуле

$$OA = K_x x_{\min} + O_1 A, \qquad (13а)$$

где O_1 — точка на оси абсцисс, соответствующая $x_{\min}$; расстояние O_1A измеряют в миллиметрах.

Ордината указанной точки A соответствует $S_y(F) = y = O$ $[F = 0{,}50]$.

Оценку параметра $\hat{\sigma}$ (среднего квадратического отклонения) вычисляют по формуле

$$\hat{\sigma} = \frac{H}{6{,}00 K_x} \cdot \frac{1}{q}, \qquad (14)$$

где q — угловой коэффициент аппроксимирующей прямой.

Для $H = 300$ используют формулу

$$\hat{\sigma} = \frac{50}{K_x} \cdot \frac{1}{q}. \qquad (15)$$

3.1.6. Допускается другой способ определения оценки параметра m — не по $F_0(x)$, а по $\hat{F}(x)$. При этом $\hat{m}$ определяют из условия $\hat{F}(\hat{m}) = 0{,}5$ или $100\hat{F}(\hat{m}) = 50$ или же $U_p(\hat{F}(\hat{m})) = O$ (в качестве A в формуле (13) рассматривают точку пересечения $\hat{F}(x)$ с осью абсцисс).

Оценку $\hat{\sigma}$ вычисляют по формуле

$$\hat{\sigma} = \hat{m} - \hat{x}_1, \qquad (16)$$

где $\hat{x}_1$ — оценка абсциссы прямой, для которой справедливо

$$F_0(x_1) = 0{,}1587 \text{ или } 100F_0(x_1) = 15{,}87 \text{ или } U_p = -1.$$

Оценку среднего квадратического отклонения вычисляют также по формуле

$$\hat{\sigma} = \hat{x}_2 - \hat{m}, \qquad (17)$$

где для $\hat{x}_2$ справедливо

$$F_0(x_2) = 0{,}8413 \text{ или } 100F_0(x_2) = 84{,}13, \text{ или } U_p = +1.$$

3.1.7. Пример использования вероятностной сетки для нормального распределения приведен в справочном приложении 1 (пример 2).

3.2. Экспоненциальное распределение

3.2.1. Случайная величина X распределена по экспоненциальному закону, если ее функция распределения имеет вид

$$F(x;\ \lambda,c)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda(x-c)}, & x\geqslant c, \\ 0, & x<c, \end{cases} \qquad (18)$$

где λ — параметр масштаба, c — параметр сдвига.

Вероятностная сетка для экспоненциального распределения устроена следующим образом: по оси абсцисс применяют равномерную шкалу, а по оси ординат откладывают значения y и надписывают величину $F\ (y)=1-e^{-y}$.

3.2.2. Коэффициент масштаба K_x для оси абсцисс вычисляется по формуле (9).

3.2.3. Для выбора масштаба по оси ординат задаются

$$F_{\min}=0{,}0000,\ \ F_{\max}=0{,}9975.$$

Тогда $y_{\min}=0{,}0000,\ \ y_{\max}=6{,}0000,$

и величину $S_y\ (F)$, которую откладывают по оси ординат в миллиметрах, вычисляют по формуле

$$S_y(F)=\frac{H}{y_{\max}}\cdot y=\frac{H}{6{,}0000}\cdot y, \qquad (19)$$

где $y=-\ln\ (1-F)$.

Если $H=300$ мм, то $S_y\ (F)=S^0_y\ (F)=50\,y$. Значения $S^0_y\ (F)$ для случая экспоненциального распределения приведены в табл. 2 (при $H=300$ мм).

При $H\neq 300$ мм $S_y\ (F)$ вычисляют по формуле (12), где $S^0_y\ (F)$ приведено в табл. 2.

3.2.4. По выборочным значениям экспоненциально распределенной случайной величины X на вероятностной сетке для экспоненциального распределения (справочное приложение 2, черт. 2, см. бандероль) строят прямую.

Если заранее известно, что случайная величина имеет экспоненциальное распределение без сдвига ($c=0$), то построенная прямая должна проходить через начало координат (справочное приложение 1, пример 3).

В противном случае, если построенная прямая пересекает ось абсцисс в точке A, то оценку параметра сдвига $\hat{C}$ определяют по формуле

$$\hat{C}=\pm\frac{OA}{K_x}, \qquad (21)$$

где K_x — коэффициент масштаба для оси абсцисс (формула (9));

OA — расстояние точки A от начала координат, мм (см. примечание к п. 3.1.5).

3.2.5. Оценку параметра λ экспоненциального распределения вычисляют по формуле

$$\hat{\lambda}=\frac{K_x}{H}\cdot 6{,}0000\cdot q, \tag{22}$$

где $q=\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент аппроксимирующей прямой.

3.2.6. Примеры определения статистических характеристик для экспоненциального распределения приведены в справочном приложении 1 (примеры 3 и 4).

3.3. Логарифмически нормальное распределение

3.3.1. Случайная величина X считается распределенной по логарифмически нормальному закону, если ее функция распределения имеет вид

$$F(x;\ \mu,\sigma)=\Phi\left(\frac{\lg x-\mu}{\sigma}\right) \tag{23}$$

для $0<x<\infty$; $\mu>0$; $\sigma>0$;

где

$$\Phi(y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\varphi(v)dv=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y}e^{-\frac{v^2}{2}}dv.$$

Таблица 2

Вероятностная шкала для экспоненциального распределения

$S_y^0(F)=-50\ln(1-F)$

$H=300$

F	$S_y(F)$	F	$S_y(F)$	F	$S_y(F)$
0	0	0,52	36,7	0,74	67,4
0,05	2,6	0,54	38,8	0,76	71,4
0,10	5,3	0,56	41,0	0,78	75,7
0,15	8,1	0,58	43,4	0,80	80,5
0,20	11,2	0,60	45,8	0,82	85,7
0,25	14,4	0,62	48,4	0,84	91,6
0,30	17,8	0,64	51,1	0,86	98,3
0,35	21,5	0,66	53,9	0,88	106,0
0,40	25,5	0,68	57,0	0,900	115,1
0,45	29,9	0,70	60,2	0,905	117,7
0,50	34,7	0,72	63,7	0,910	120,4

Продолжение табл. 2

F	$S_y(F)$	F	$S_y(F)$	F	$S_y(F)$
0,915	123,3	0,974	182,5	0,9952	267,0
0,920	126,3	0,976	186,5	0,9954	269,1
0,925	129,5	0,978	190,8	0,9956	271,3
0,930	133,0	0,980	195,6	0,9958	273,6
0,935	136,7	0,982	200,9	0,9960	276,1
0,940	140,7	0,984	206,8	0,9962	278,6
0,945	145,0	0,986	213,4	0,9963	280,0
0,950	149,8	0,988	221,1	0,9964	281,3
0,952	151,8	0,9900	230,3	0,9965	282,7
0,954	154,0	0,9905	232,8	0,9966	284,2
0,956	156,2	0,9910	235,5	0,9967	285,7
0,958	158,5	0,9915	238,4	0,9968	287,2
0,960	160,9	0,9920	241,4	0,9969	288,8
0,962	163,5	0,9925	244,6	0,9970	290,4
0,964	166,2	0,9930	248,1	0,9971	292,2
0,966	169,1	0,9935	251,8	0,9972	293,9
0,968	172,1	0,9940	255,8	0,9973	295,7
0,970	175,3	0,9945	260,2	0,9974	297,6
0,972	178,8	0,9950	264,9	0,9975	299,6

Здесь μ — математическое ожидание и σ — среднее квадратическое отклонение случайной величины $y = \lg x$.

Вероятностная сетка для логарифмически нормального распределения содержит по оси абсцисс логарифмическую шкалу и по оси ординат значения y, которые обозначают через Φ (y).

3.3.2. Коэффициент масштаба K_x для оси абсцисс вычисляют по формуле

$$K_x = \frac{L}{\lg x_{max} - \lg x_{min}}, \tag{24}$$

где L, x_{min}, x_{max} — по п. 3.1.3.

Величину S_x (x) вычисляют по формуле

$$S_x(x) = K_x \cdot \lg x. \tag{25}$$

Для $K_x = 100$ в табл. 3 приведены значения

$$S_x^0(x) = 100 \lg x.$$

Для $K_x \neq 100$ величину S_x (x) находят по формуле

$$S_x(x) = \frac{K_x}{100} S_x^0(x). \tag{25а}$$

3.3.3. Величину S_y (F), откладываемую по оси ординат, определяют по формуле (10).

В табл. 1 приведены значения $S_y(F)=S_y^0\,(F)$ для случая $H=300$ мм; тогда $S_y^0\;(F)=50\;y$.

3.3.4. Если известно, что случайная величина имеет логарифмически нормальное распределение, то на вероятностную сетку для логарифмически нормального распределения наносят точки по формулам (25) и (10). Затем строят прямую.

Если точка A представляет собой точку пересечения прямой с осью абсцисс, то оценку параметра $\hat{\mu}$ находят по формуле

$$\hat{\mu}=\frac{\pm OA}{K_x}, \tag{26}$$

где O — начало координат, OA — расстояние от O до A, измеряемое в миллиметрах.

Примечание. Знак OA в формуле (26) определяют в соответствии с примечанием в п. 3.1.5.

Если начало координат O не помещено на чертеже, то OA вычисляют по формуле

$$OA=K_x\lg x_{\min}+O_1A, \tag{27}$$

где O_1 — точка на оси абсцисс, соответствующая $x_{\min}$; расстояние O_1A измеряют в миллиметрах.

Оценку $\hat{\sigma}$ параметра σ определяют по формуле (14), где K_x вычисляют по формуле (24).

3.4. Распределение Вейбулла

3.4.1. Случайная величина X распределена по двухпараметрическому закону Вейбулла, если ее функция распределения имеет вид

$$F(x;a,b)=\begin{cases}1-exp\left\{-\left(\dfrac{x}{a}\right)^b\right\}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

где a — параметр масштаба, b — параметр формы.

Вероятностная сетка для распределения Вейбулла устроена следующим образом. По оси абсцисс — логарифмическая шкала, а по оси ординат откладывают значения y и обозначают их через величину $F\,(y)$.

Значения $F\,(y)$ вычисляют по формуле

$$F(y)=1-e^{-e^{y}}, \tag{28}$$

где

$$y=\ln[-\ln(1-F)]. \tag{29}$$

3.4.2. Величину S_x (x) находят по формуле (25), где коэффициент масштаба K_x для оси абсцисс вычисляют по формуле (24), а табл. 3 применяют по п. 3.3.2.

3.4.3. Для выбора масштаба по оси ординат задаются

$$F_{min}=0{,}001,\ F_{max}=0{,}999.$$

Тогда $y_{min}=-6{,}91$, $y_{max}=+1{,}93$, а размах величины y равен 8,84.

Величину S_y (F) вычисляют по формуле

$$S_y(F)=\frac{H}{8{,}84}\cdot y, \qquad (30)$$

где y определяется по формуле (29).

Длина шкалы по оси ординат $H=300$ мм соответствует S_y $(F)=S^0_y$ $(F)=33{,}94$ y (табл. 4).

Для длины шкалы $H\neq 300$ мм величину S_y (F) вычисляют по формуле (12), в которой S^0_y (F) берут из табл. 4.

3.4.4. Если исследуемая случайная величина X подчиняется двухпараметрическому распределению Вейбулла, то на вероятностную оценку для распределения Вейбулла (справочное приложение 2, черт. 3, см. бандероль) наносят точки по формулам (25) и (30). Затем строят прямую наиболее близкую к этим точкам.

Если точка А является точкой пересечения этой прямой с осью абсцисс, то оценку параметра масштаба $\hat{a}$ определяют из уравнения

$$K_x\cdot\lg\hat{a}=\pm OA. \qquad (31)$$

Таблица 3

Логарифмическая шкала

S^0_x $(x)=100$ $\lg x$

x	$S_x(x)$	x	$S_x(x)$	x	$S_x(x)$
1,00	0	1,50	17,6	2,0	30,1
1,05	2,1	1,55	19,0	2,1	32,2
1,10	4,1	1,60	20,4	2,2	34,2
1,15	6,1	1,65	21,7	2,3	36,2
1,20	7,9	1,70	23,0	2,4	38,0
1,25	9,7	1,75	24,3	2,5	39,8
1,30	11,4	1,80	25,5	2,6	41,5
1,35	13,0	1,85	26,7	2,7	43,1
1,40	14,6	1,90	27,9	2,8	44,7
1,45	16,1	1,95	29,0		

Продолжение табл. 3

x	$S_x(x)$	x	$S_x(x)$	x	$S_x(x)$
2,9	46,2	4,5	65,3	7,2	85,7
3,0	47,7	4,6	66,3	7,4	86,9
3,1	49,1	4,7	67,2	7,6	88,1
3,2	50,5	4,8	68,1	7,8	89,2
3,3	51,9	4,9	69,0	8,0	90,3
3,4	53,1	5,0	69,9	8,2	91,4
3,5	54,4	5,2	71,6	8,4	92,4
3,6	55,6	5,4	73,2	8,6	93,4
3,7	56,8	5,6	74,8	8,8	94,4
3,8	58,0	5,8	76,3	9,0	95,4
3,9	59,1	6,0	77,8	9,2	96,4
4,0	60,2	6,2	79,2	9,4	97,3
4,1	61,3	6,4	80,6	9,6	98,2
4,2	62,3	6,6	82,0	9,8	99,1
4,3	63,6	6,8	83,3	10,0	100,0
4,4	64,3	7,0	84,5		

Примечание. Если значение x выходит за пределы табличных данных, т. е.

$$10^k \leqslant x < 10^{k+1} (k = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

то следует пользоваться формулой

$$100 \lg x = 100 \lg \frac{x}{10^k} + 100k.$$

Таблица 4

Вероятностная шкала для распределения Вейбулла

$$S^0_y(F) = 33{,}94 \ln[-\ln(1-F)]$$

$$H = 300 \text{ мм}$$

F	$S_y(F)$, мм	F	$S_y(F)$, мм	F	$S_y(F)$, мм
0,0010	—234,6	0,0030	—197,2	0,0050	—179,7
0,0012	—228,3	0,0032	—195,0	0,0055	—176,4
0,0014	—222,9	0,0034	—192,8	0,0060	—173,6
0,0016	—218,2	0,0036	—190,8	0,0065	—170,8
0,0018	—214,6	0,0038	—189,1	0,0070	—168,3
0,0020	—211,2	0,0040	—187,3	0,0075	—165,9
0,0022	—207,5	0,0042	—185,6	0,0080	—163,7
0,0024	—204,8	0,0044	—184,0	0,0085	—161,6
0,0026	—202,0	0,0046	—182,6	0,0090	—159,7
0,0028	—199,4	0,0048	—181,1	0,0095	—157,8

Продолжение табл. 4

F	$S_y(F)$, мм	F	$S_y(F)$, мм	F	$S_y(F)$, мм
0,010	—156,2	0,075	—86,6	0,5000	—12,4
0,012	—149,9	0,080	—84,3	0,5400	—8,6
0,014	—144,7	0,085	—82,2	0,5800	—4,8
0,016	—140,1	0,090	—80,1	0,6200	—1,1
0,018	—136,0	0,095	—78,2	0,6321	0,0
0,020	—132,4	0,100	—76,4	0,6600	+2,6
0,022	—129,2	0,120	—69,8	0,7000	+6,2
0,024	—126,2	0,140	—64,2	0,7400	+10,1
0,026	—123,4	0,160	—59,3	0,7800	+14,1
0,028	—120,9	0,180	—54,9	0,8200	+18,3
0,030	—118,5	0,200	—50,9	0,8600	+22,9
0,032	—116,3	0,220	—47,3	0,9000	+28,3
0,034	—114,2	0,240	—43,9	0,9250	+32,3
0,036	—112,2	0,260	—40,7	0,9500	+37,2
0,038	—110,3	0,280	—37,8	0,9600	+39,7
0,040	—108,6	0,3000	—35,0	0,9700	+42,6
0,042	—106,9	0,3200	—32,3	0,9800	+46,3
0,044	—105,3	0,3400	—30,1	0,9900	+51,8
0,046	—103,7	0,3600	—27,4	0,9925	+53,9
0,048	—102,2	0,3800	—25,0	0,9950	+56,6
0,050	—100,8	0,4000	—22,8	0,9960	+57,7
0,055	—97,5	0,4200	—20,6	0,9970	+59,7
0,060	—94,4	0,4400	—18,6	0,9980	+62,0
0,065	—91,2	0,4600	—16,4	0,9990	+65,4
0,070	—89,1	0,4800	—14,4		

где OA — расстояние точки A от начала координат O.

Примечание. Знак перед OA в формуле (31) определяет в соответствии с примечанием в п. 3.1.5. Если начало координат O не помещено на чертеже, то OA вычисляют по формуле (27).

Оценку параметра масштаба a можно также определить с помощью табл. 3 по формуле

$$S_x^0(\hat{a}) = \frac{\pm OA}{K_x} \cdot 100. \qquad (32)$$

Оценку $\hat{b}$ параметра формы b вычисляют по формуле

$$\hat{b} = 3{,}84 \frac{K_x}{H} \cdot q, \qquad (33)$$

где K_x — вычисляют по формуле (24),
$q = \operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент аппроксимирующей прямой,
H — длина шкалы по оси координат.

Для шкалы по оси ординат длиной $H=300$ мм формула (33) примет вид

$$\hat{b}=\frac{K_x}{78{,}1}\,q. \qquad (34)$$

Разд. 3 (Измененная редакция, Изм. № 1).
Разделы 4, 5, 6 и 7 **(Исключены, Изм. № 1).**

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
Справочное

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРАВИЛ СТАНДАРТА

Пример 1. На опыте получена выборка объемом $n=100$. Значение элементов выборки приведены в табл. 1.

Таблица 1

x_i	x_i	x_i	x_i
+46	+20	+168	+128
+6	+16	—15	—14
+149	+227	+60	—89
+102	+4	—90	+19
+139	—113	—116	—20
+91	+77	—26	+245
+118	+38	—36	—53
—150	—51	+183	—63
—69	+29	+53	+128
+137	+103	—206	+5
—48	—133	—201	—52
—138	—29	+118	+1
—101	+16	—114	—16
—5	—136	+36	—162
+139	+125	—23	+38
—179	+14	+21	—6
—10	—253	+27	+136
—134	—35	+61	—92
+104	+47	—31	+1
+28	—55	—210	—91
—180	—51	+8	—124
—119	—105	—166	—138
+66	—49	—34	—96
—44	+76	—52	—73
—140	+22	+299	+72

Производим группировку и подсчет точек.

Выбираем $x^*=-260$, $x^{**}=300$, $x^{**}-x^*=560$. Разбиваем интервал [—260, 300] на 14 интервалов длины $h=40$. Для подсчета n_j составляем табл. 2.

Подсчет n_j производится следующим образом (п. 2.1.4): перебирают элементы выборки и когда в j-й интервал попадает элемент, то в j-й строке табл. 2 ставят штрих. Если элемент выборки совпадает с границей j-го и $(j+1)$-го интервалов, $j=1,2,\ldots,k-1$, то в j-й и в $(j+1)$-й строках ставят штрихи половинной длины. Каждый пятый штрих в строке перечеркивает предыдущие четыре, если он не соответствует границе интервала; в этом случае ставят вертикальный штрих половинной длины.

Таблица 2

Номер интервала	Интервал группировки	Число точек	Номер интервала	Интервал группировки	Число точек
1	—260, —220	1	8	+20, +60	12
2	—220, —180	3,5	9	+60, +100	6,5
3	—180, —140	5	10	+100, +140	12
4	—140, —100	12,5	11	+140, +180	2
5	—100, —60	8	12	+180, +220	1
6	—60, —20	16,5	13	+220, +260	2
7	—20, +20	17	14	+260, +300	1

Пример 2. В процессе эксперимента получили результаты, которые включили в восемь классов (табл. 3).

Определить оценки параметров $\hat{m}$ и $\hat{\sigma}$ нормального распределения.

Таблица 3

Упорядоченные результаты, полученные в процессе эксперимента

i	x_i	n_i	$\sum_{j=1}^{i} n_j$	$\hat{F}(x_{(i)})=\sum_{j=1}^{i}\frac{n_j}{n+1}$
1	20	2	2	0,03
2	40	4	6	0,10
3	60	9	15	0,25
4	80	14	29	0,48
5	100	15	44	0,73
6	120	8	52	0,87
7	140	5	57	0,95
8	160	2	59	0,98

Решение.

Общее число наблюдений $n=59>30$. Поэтому целесообразно использовать группировку данных по п. 2.1.4 (табл. 3).

Точечную оценку эмпирической функции распределения вычислим по формуле (7).

Для построения вероятностной сетки выберем $L=140$.

Коэффициент масштаба K_x для оси абсцисс вычислим по формуле (9):

$$K_x=\frac{140}{160-20}=1$$

Длину шкалы по оси ординат H выберем 200 мм. Значения $S_y\ (F)$ вычислим по формуле (12).

Точки $\left\{ x_{(i)},\ \widehat{F}\ (x_{(i)}) \right\}$ из табл. 3 нанесем на вероятностную сетку и построим прямую (черт. 1, см. бандероль), с помощью которой найдем значения: $OA=82{,}5$ мм, $q=0{,}93$ (т. е. $\alpha=43°$).

Точечную оценку математического ожидания $\widehat{m}$ вычислим по формуле (13):

$$\widehat{m}=\frac{82{,}5}{1}=82{,}5.$$

Точечную оценку среднего квадратического отклонения $\widehat{\sigma}$ найдем по формуле (14):

$$\widehat{\sigma}=\frac{200}{6\cdot 1}\cdot\frac{1}{0{,}93}=35{,}8.$$

Примечания: 1. Оценку параметра $\widehat{m}$ определяют по п. 3.1.6:

$$\widehat{m}=82{,}5.$$

2. Оценку параметра (среднего квадратического отклонения) $\widehat{\sigma}$ определяют по п. 3.1.6:

$$\widehat{\sigma}=\widehat{m}-x_1=82{,}5-46{,}7=35{,}8 \text{ или}$$

$$\widehat{\sigma}=x_2-\widehat{m}=118{,}3-82{,}5=35{,}8.$$

Пример 3. При исследовании получена выборка из 15 значений случайной величины X, подчиняющейся экспоненциальному распределению без сдвига ($C=0$, построенная прямая должна проходить через начало координат). Упорядоченные значения x_i приведены в табл. 4.

Найти оценку $\widehat{\lambda}$ параметра λ.

Таблица 4

Упорядоченные значения случайной величины x_i

i	x_i	$K_x\ x_i$, мм	$\widehat{F}(x_i)$	$S_y(F)$, мм
1	150	7,5	0,063	3,3
2	200	10,0	0,125	6,7
3	291	14,6	0,187	10,5
4	380	19,0	0,250	14,4
5	446	22,3	0,312	18,6
6	550	27,5	0,375	23,1
7	595	29,8	0,437	29,0
8	629	31,5	0,500	34,7
9	840	42,0	0,563	41,0
10	1036	51,8	0,625	48,4
11	1194	58,7	0,687	57,1
12	1337	66,8	0,750	69,3
13	1774	88,7	0,812	83,0
14	2280	114,0	0,875	104,0
15	2827	141,3	0,937	139,0

Решение.

Для построения вероятностной сетки выберем длину шкалы по оси ординат $H=300$ мм и ширину графика $L=134$ мм.

Коэффициент масштаба по оси абсцисс K_x вычисляют по формуле (9), где $x_{max}-x_{min}=2827-150=2677$:

$$K_x=\frac{134}{2677}=0,05.$$

Значения $S_y(F)$, приведенные в табл. 2 настоящего стандарта, откладывают по оси ординат в миллиметрах.

Точечную оценку функции распределения найдем по формуле (1):

$$\hat{F}(x_1)=\frac{1}{15+1}=0,063 \text{ и т. д.}$$

После нанесения точек на вероятностную сетку для экспоненциального распределения (справочное приложение 2, черт. 2) построим прямую, проходящую через начало координат (черт. 2, см. бандероль).

Из графика получим значение углового коэффициента аппроксимирующей прямой $q=0,93$.

Точечную оценку параметра $\hat{\lambda}$ найдем по формуле (22):

$$\hat{\lambda}=\frac{0,05}{300}\cdot 6\cdot 0,93=9,3\cdot 10^{-4}.$$

Пример 4. При ресурсных испытаниях невосстанавливаемых электронных деталей найдены значения случайной величины x_i, которые приведены в табл. 5.

Предполагается, что данная случайная величина подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятности со сдвигом ($c\neq 0$).

Найти оценки параметра сдвига $\hat{c}$ и параметра масштаба $\hat{\lambda}$.

Таблица 5

Упорядоченные значения случайной величины

i	x_i	$S_x(x)=K_x\cdot x_i$, мм	$\hat{F}(x_i)$	$S_y^0(F)$, мм	$S_y(F)$
1	526	18,4	0,063	3,3	2,2
2	566	19,8	0,125	6,7	4,46
3	664	23,2	0,187	10,5	7
4	673	23,6	0,250	14,4	9,6
5	767	26,8	0,312	18,6	12,4
6	857	30,0	0,375	23,1	15,4
7	1000	35,0	0,437	29,0	19,3
8	1068	37,4	0,500	34,7	23,1
9	1191	41,7	0,563	41,0	27,3
10	1484	51,9	0,625	48,4	32,27
11	1819	63,7	0,687	57,1	38,06
12	2046	71,6	0,750	69,3	46,2
13	2571	90,0	0,812	83,0	55,33
14	3057	107,0	0,875	104,0	69,3
15	4610	161,4	0,937	139,0	92,7

Решение.

Для построения вероятностной сетки выберем шкалу длиной по оси ординат $H=300$ мм и ширину графика $L=143$ мм.

Коэффициент масштаба для оси абсцисс K_x вычисляют по формуле (9), где $x_{max}-x_{min}=4610-526=4084$:

$$K_x=\frac{143}{4084}=0{,}035.$$

Значения $S^0{}_y(F)$, соответствующие $H=300$ мм, приведены в табл. 2 настоящего стандарта.

Точечную оценку функции распределения определим по формуле (1):

$$\widehat{F}(x_1)=\frac{1}{15+1}=\frac{1}{16}=0{,}063, \text{ и т.д.}$$

После нанесения точек на вероятностную сетку (справочное приложение 2, черт. 3) построим прямую (черт. 3, см. бандероль). Из графика определим OA (расстояние точка A от начала координат O) и q (угловой коэффициент аппроксимирующей прямой):

$$OA=14 \text{ мм}; \ q=0{,}61.$$

Точечную оценку параметра сдвига $\widehat{c}$ найдем по формуле (21):

$$\widehat{c}=\frac{14000}{0{,}035}=400.$$

Точечную оценку параметра $\widehat{\lambda}$ вычислим по формуле (22):

$$\widehat{\lambda}=\frac{0{,}035}{200}\cdot 6\cdot 0{,}61=6{,}4\cdot 10^{-4}.$$

Пример 5. На опыте получена выборка из 15 значений случайной величины, распределенной по логарифмически нормальному закону. Упорядоченные значения x_i приведены в табл. 6.

Найти оценки параметров $\widehat{\mu}$ и $\widehat{\sigma}$.

Таблица 6

i	x_i	$S_x(x)=425\lg x$	$100\,\widehat{F}(x_i)$	i	x_i	$S_x(x)=425\lg x$	$100\,\widehat{F}(x_i)$
1	599	1180	6,3	9	1028	1280	56,2
2	648	1195	12,5	10	1055	1285	62,5
3	796	1233	18,7	11	1077	1289	68,7
4	896	1254	25,0	12	1078	1289	75,0
5	905	1257	31,2	13	1126	1297	81,2
6	927	1261	37,5	14	1185	1306	87,5
7	943	1264	43,7	15	1428	1340	93,7
8	1010	1277	50,0				

Решение.

Найдем $\lg x_{max}$ и $\lg x_{min}$ с помощью табл. 3 настоящего стандарта.

Поскольку значения x лежат за ее пределами, значения $S^0_x(x)=100 \lg x$ вычисляем по формуле:

$$100 \lg x = 100 \lg \frac{x}{10^k} + 100\ k.$$

Имеем:

$$100 \lg x_{max} = 100 \lg \frac{x_{max}}{1000} + 300 = 100 \lg \frac{1428}{1000} + 300 = 315,4;$$

$$100 \lg x_{min} = 100 \lg \frac{x_{min}}{100} + 200 = 100 \lg \frac{599}{100} + 200 = 277,8;$$

$$100(\lg x_{max} - \lg x_{min}) = 315,4 - 277,8 = 37,6;$$

$$\lg x_{max} - \lg x_{min} = 0,376.$$

Для построения вероятностной сетки выберем $L=160$ мм и $H=200$ мм. Коэффициент масштаба для оси абсцисс K_x вычислим по формуле (24):

$$K_x = \frac{L}{\lg x_{max} - \lg x_{min}} = \frac{160}{0,376} = 425.$$

В соответствии с формулой (25а)

$$S_x(x) = K_x \cdot \lg x = 4,25 \cdot 100 \lg x = 4,25\ S^0_x(x).$$

По табл. 3 настоящего стандарта находим значение $S^0_x(x)=100 \lg x$ и, умножив их на 4,25, записываем в табл. 6.

Определяем $\hat{F}(x_i)$ по формуле (1).

Построив прямую по полученным точкам $\{S_x(x_i),\ 100\ \hat{F}(x_i)\}$, координаты которых приведены в табл. 6 (черт. 4, см. бандероль), найдем значения

$$O_1A = 86\ (мм);$$

$$q = 0,856.$$

Точечную оценку $\hat{\mu}$ вычислим по формулам (26) и (27):

$$OA = K_x \lg x_{min} + O_1A = 425 \cdot 2,778 + 86 = 1267,$$

$$\hat{\mu} = \frac{1267}{425} = 2,98.$$

Находим оценку параметра $\hat{\sigma}$:

$$\hat{\sigma} = \frac{H}{6,000 \cdot K_x} \cdot \frac{1}{q} = \frac{200}{6,0 \cdot 425} \cdot \frac{1}{0,856} = 0,092.$$

Пример 6. Имеется выборка из 15 значений случайной величины X, имеющей двухпараметрическое распределение Вейбулла. Упорядоченные значения x_i приведены в табл. 7.

Найти оценки параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$.

Таблица 7

$H=217$

i	x_i	$S_x(x)=57 \lg x$, мм	$\hat{F}(x_i)=\frac{i}{n+1}$	$S_y(F)$, мм
1	1	0	0,062	—66
2	3	27,2	0,125	—49
3	3	27,2	0,187	—39
4	4	34,3	0,250	—30
5	10	57,0	0,312	—24
6	17	70,1	0,375	—19
7	18	71,6	0,437	—14
8	26	80,7	0,500	— 9
9	31	85,0	0,563	— 5
10	56	99,7	0,625	0
11	108	115,9	0,687	4
12	127	119,9	0,750	9
13	207	132,0	0,812	13
14	540	155,7	0,875	18
15	668	161,0	0,937	26

Решение.

Выбираем ширину графика $L=161$ мм. Поскольку $\lg x_{\min}=\lg 1=0$, $\lg x_{\max}=\lg 668=2{,}825$, то по формуле (24) находим

$$K_x=\frac{161}{2{,}825}=57.$$

Значения $S_x(x_i)$ находим по формуле (25). Они приведены в табл. 7. Значения $\hat{F}(x_i)$ вычисляем по формуле (1).

Выбираем длину шкалы по оси ординат $H=217$ мм. Величины $S_y(F)$ вычисляем по формуле (12). Они приведены в табл. 7.

На вероятностную сетку для распределения Вейбулла (черт. 5, см. бандероль) наносим точки $(x_i\ \hat{F}(x_i))$, $i=1,2,\ldots,15$, и строим по ним прямую, как указано в стандарте.

Измеряем $OA=103$ мм. Решаем уравнение (31):

$$\lg\hat{a}=\frac{OA}{K_x}=\frac{103}{57}=1{,}81;\quad \hat{a}=64{,}1.$$

Измеряем $q=0{,}53$. Находим $\hat{b}$ по формуле (33):

$$\hat{b}=3{,}84\frac{K_x}{H}\cdot q=3{,}84\frac{57}{217}\cdot 0{,}53=0{,}53.$$

Примечание. На вероятностной сетке для распределения Вейбулла справа приведена дополнительная шкала для определения оценки параметра $\hat{b}$. Для этого через точку A_0 (в правом нижнем углу сетки) проводят прямую, параллельную построенной в соответствии с правилами настоящего стандарта, и по шкале снимают значения оценки $\hat{b}$. Для данных табл. 7 снимаем $\hat{b}=0{,}53$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Справочное

ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Точность, с какой точечная оценка оценивает функцию распределения теоретической модели, описывается доверительным интервалом.

2. Доверительный интервал для значения функции распределения $y=F(x_i)$ ограничен доверительными границами $F_{н}(x_i)$ и $F_{в}(x_i)$ с заранее выбранной близкой к 1 вероятностью, называемой доверительной вероятностью:

$$P\{F_{н}(x_i)<F(x_i)<F_{в}(x_i)\}=1-\alpha,$$

где $1-\alpha$ — доверительная вероятность.

3. Двухсторонние доверительные границы $F_{н}(x_i)$ и $F_{в}(x_i)$ при $1-\alpha=0{,}80$ для значений функции распределения $F(x_i)$ в выборках объемом n от 1 до 30 находят по табл. 2 и 3 и для $1-\alpha=0{,}90$ при n от 1 до 20 по табл. 4 и 5 ($i=1, 2, \ldots, n$).

Применение этого способа иллюстрируется примером 1.

Пример 1. В табл. 1 приведены данные, полученные в процессе наблюдения объектов ($n=15$). Предполагается, что исследуемая величина X подчиняется двухпараметрическому распределению Вейбулла. Определить доверительные границы для функции распределения, соответствующие доверительной вероятности $1-\alpha=0{,}80$.

Точечную оценку функции распределения $\hat{F}(x_i)$ определяем по формуле (1) настоящего стандарта (табл. 1).

Полученные точки $\{x_i, \hat{F}(x_i)\}$ нанесем на вероятностную сетку для распределения Вейбулла (черт. 3 приложения 2) и проведем прямую $y=F_0(x)$ (черт. 1). Угловой коэффициент $\hat{b}$ этой прямой является оценкой параметра формы b. Затем через точку A_0 проведем прямую, параллельную прямой $y=F_0(x)$ (черт. 1), которая пересечет шкалу b в точке $\hat{b}=0{,}53$. Полученное значение $\hat{b}$ является оценкой параметра b (см. пример 6 приложения 1).

Для оценки параметра масштаба a для распределения Вейбулла найдем на прямой $y=F_0(x)$ точку, для ординаты которой справедливо $\ln[-\ln(1-$

Таблица 1

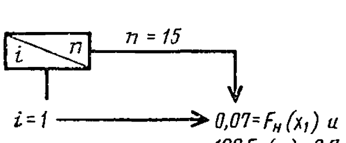
Данные, полученные в процессе наблюдений объектов

i	x_i	$\hat{F}(x_i)$	$100\hat{F}(x_i)$	Из табл. 2		Из табл. 3	
				$F_н(x_i)$	$100F_н(x_i)$	$F_в(x_i)$	$100F_в(x_i)$
1	1	0,062	6,2	0,007	0,7	0,142	14,2
2	3	0,125	12,5	0,037	3,7	0,236	23,6
3	3	0,187	18,7	0,076	7,6	0,307	30,7
4	4	0,250	25,0	0,122	12,2	0,400	40,0
5	10	0,312	31,2	0,178	17,8	0,470	47,0
6	17	0,375	37,5	0,224	22,4	0,530	53,0
7	18	0,437	43,7	0,284	28,4	0,590	59,0
8	26	0,500	50,0	0,350	35,0	0,660	66,0
9	31	0,563	56,3	0,410	41,0	0,716	71,6
10	56	0,625	62,5	0,470	47,0	0,776	77,6
11	108	0,687	68,7	0,530	53,0	0,822	82,2
12	127	0,750	75,0	0,600	60,0	0,878	87,8
13	207	0,812	81,2	0,693	69,3	0,924	92,4
14	540	0,875	87,5	0,764	76,4	0,963	96,3
15	668	0,937	93,7	0,858	85,8	0,993	99,3

$-F_0(x))]=0$. Через найденную точку проведем прямую, параллельную оси абсцисс, которая пересечет прямую $y=F_0(x)$ в точке В. Из точки В опустим перпендикуляр на ось абсцисс. Точка пересечения $\hat{a}=64{,}1$ является оценкой параметра масштаба a.

На график наносят доверительные границы следующим образом.

а) В случае нижней доверительной границы $F_н(x_i)$ для соответствующих наблюдаемых значений x_i и соответствующих номеров i находят из табл. 2 (для $n=15$) соответствующие значения $F_н(x_i)$ и наносят на чертеж точки $\{x_i,\ 100F_н(x_i)$. Например, для $i=1$ находят при $n=15$ значение



Остальные значения $F_н(x_i)$ указаны в табл. 1 и соответствующие точки нанесены на черт. 1 (см. бандероль).

б) Для верхней доверительной границы $F_в(x_i)$ аналогичным способом находят по табл. 3 (для $n=15$) соответствующие значения. Например, для $i=5$ находят $F_в(x_5)=0{,}470$ и $100\ F_в(x_5)=47{,}0$. Значения $F_в(x_i)$ приведены в табл. 1.

Таблица 2

Нижние доверительные границы $F_н(x_i)$ для значений функции распределения $F(x_i)$ в выборках объемом $n = 1 \div 30$ для двухсторонней доверительной вероятности $1-\alpha=0{,}80$

i	Объем выборки n																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	25	30
1	0,010	0,051	0,035	0,026	0,021	0,017	0,015	0,013	0,012	0,010	0,009	0,008	0,007	0,007	0,006	0,005	0,005	0,004
2		0,316	0,196	0,143	0,112	0,093	0,079	0,069	0,050	0,054	0,045	0,039	0,037	0,034	0,030	0,027	0,027	0,018
3			0,464	0,320	0,247	0,201	0,170	0,147	0,130	0,116	0,096	0,081	0,076	0,071	0,063	0,056	0,045	0,037
4				0,562	0,416	0,333	0,279	0,240	0,210	0,187	0,154	0,131	0,122	0,114	0,101	0,090	0,072	0,059
5					0,637	0,490	0,404	0,345	0,301	0,267	0,219	0,185	0,178	0,161	0,142	0,127	0,101	0,083
6						0,681	0,547	0,462	0,401	0,354	0,288	0,243	0,224	0,210	0,185	0,166	0,137	0,108
7							0,720	0,594	0,510	0,448	0,362	0,304	0,284	0,263	0,231	0,207	0,163	0,135
8								0,750	0,632	0,550	0,441	0,369	0,350	0,307	0,279	0,249	0,196	0,162
9									0,776	0,663	0,525	0,437	0,410	0,375	0,329	0,293	0,230	0,190
10										0,794	0,614	0,508	0,470	0,434	0,380	0,338	0,265	0,218
11											0,712	0,583	0,530	0,436	0,433	0,385	0,301	0,247
12											0,825	0,663	0,600	0,561	0,488	0,433	0,338	0,277
13												0,749	0,693	0,629	0,545	0,432	0,375	0,307
14												0,848	0,764	0,700	0,604	0,533	0,413	0,338
15													0,858	0,778	0,665	0,585	0,452	0,370
16														0,066	0,731	0,630	0,495	0,402
17															0,801	0,696	0,533	0,434
18															0,880	0,755	0,574	0,466
19																0,820	0,617	0,500
20																0,801	0,660	0,534
21																0,705	0,705	0,568
22																	0,752	0,603
23																	0,801	0,639
24																	0,858	0,675
25																	0,912	0,712
26																		0,751
27																		0,791
28																		0,832
29																		0,876
30																		0,926

Таблица 3

Верхние доверительные границы $F_в(x_i)$ для значений функции распределения $F(x_i)$ в выборках объемом $n=1\div30$ для двухсторонней доверительной вероятности $1-\alpha=0{,}80$

i	Объем выборки n																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	25	30
1	0,90	0,684	0,536	0,438	0,369	0,319	0,280	0,250	0,224	0,206	0,175	0,152	0,142	0,134	0,120	0,109	0,088	0,074
2		0,949	0,804	0,680	0,584	0,510	0,453	0,406	0,368	0,337	0,288	0,251	0,236	0,222	0,199	0,180	0,142	0,124
3			0,965	0,857	0,753	0,667	0,596	0,538	0,490	0,450	0,386	0,337	0,307	0,300	0,269	0,245	0,199	0,169
4				0,974	0,888	0,799	0,721	0,653	0,599	0,552	0,473	0,417	0,400	0,371	0,335	0,304	0,248	0,209
5					0,979	0,907	0,830	0,760	0,701	0,646	0,559	0,492	0,470	0,439	0,396	0,361	0,295	0,249
6						0,983	0,921	0,853	0,790	0,733	0,638	0,563	0,530	0,504	0,455	0,415	0,340	0,283
7							0,985	0,931	0,870	0,813	0,712	0,631	0,590	0,566	0,512	0,467	0,383	0,325
8								0,987	0,940	0,884	0,781	0,696	0,660	0,625	0,567	0,518	0,426	0,367
9									0,938	0,946	0,846	0,757	0,716	0,693	0,620	0,567	0,467	0,397
10										0,990	0,904	0,815	0,776	0,737	0,671	0,615	0,508	0,432
11											0,955	0,869	0,822	0,790	0,721	0,662	0,548	0,466
12											0,991	0,919	0,878	0,839	0,769	0,707	0,587	0,500
13												0,961	0,924	0,886	0,815	0,751	0,623	0,534
14												0,992	0,963	0,929	0,858	0,793	0,662	0,556
15													0,993	0,966	0,899	0,834	0,699	0,588
16														0,993	0,937	0,873	0,735	0,600
17															0,970	0,910	0,770	0,662
18															0,994	0,944	0,804	0,693
19																0,973	0,837	0,723
20																0,995	0,869	0,753
21																	0,899	0,782
22																	0,928	0,810
23																	0,955	0,838
24																	0,979	0,865
25																	0,995	0,892
26																		0,917
27																		0,941
28																		0,963
29																		0,982
30																		0,906

Таблица 4

Нижние доверительные границы $F_{н}(x_i)$ для значений функции распределения $F(x_i)$ в выборках объемом $n=1\div20$ для двухсторонней доверительной вероятности $1-\alpha=0{,}90$

i	Объем выборки n																				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	,0500	,0253	,0170	,0127	,0102	,0085	,0074	,0065	,0057	,0051	,0047	,0043	,0040	,0037	,0034	,0032	,0030	,0029	,0028	,0026	1
2		,2236	,1354	,0976	,0764	,0629	,0534	,0468	,0410	,0368	,0333	,0307	,0281	,0263	,0245	,0227	,0216	,0205	,0194	,0183	2
3			,3684	,2486	,1893	,1532	,1287	,1111	,0978	,0873	,0800	,0719	,0665	,0611	,0574	,0536	,0499	,0476	,0452	,0429	3
4				,4729	,3426	,2713	,2253	,1929	,1688	,1500	,1363	,1245	,1127	,1047	,0967	,0910	,0854	,0797	,0761	,0725	4
5					,5493	,4182	,3413	,2892	,2514	,2224	,2007	,1824	,1671	,1527	,1424	,1321	,1247	,1173	,1099	,1051	5
6						,6070	,4793	,4003	,3449	,3035	,2713	,2465	,2255	,2082	,1909	,1786	,1664	,1575	,1485	,1396	6
7							,6518	,5293	,4504	,3934	,3498	,3152	,2883	,2652	,2459	,2267	,2128	,1990	,1887	,1785	7
8								,6877	,5709	,4931	,4356	,3909	,3548	,3263	,3016	,2805	,2601	,2449	,2298	,2183	8
9									,7169	,6058	,5299	,4727	,4274	,3904	,3608	,3350	,3131	,2912	,2749	,2587	9
10										,7411	,6356	,5619	,5054	,4600	,4226	,3922	,3542	,3429	,3201	,3029	10
11											,7616	,6613	,5899	,5343	,4893	,4517	,4208	,3937	,3703	,3469	11
12												,7791	,6837	,6146	,5602	,5156	,4781	,4460	,4196	,3957	12
13													,7942	,7033	,6366	,5834	,5395	,5022	,4711	,4434	13
14														,8074	,7206	,6562	,6044	,5611	,5242	,4932	14
15															,8190	,7360	,6738	,6233	,5809	,5444	15
16																,8274	,7475	,6871	,6379	,5964	16
17																	,8358	,7589	,7005	,6525	17
18																		,8441	,7704	,7138	18
19																			,8525	,7818	19
20																				,8609	20

Таблица 5

Верхние доверительные границы $F_в(x_i)$ для значений функции распределения $F(x_i)$ в выборках объемом $n=1\div20$ для двухсторонней доверительной вероятности $1-\alpha=0{,}90$

i	Объем выборки n																				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	,9500	,7764	,6316	,5271	,4507	,3930	,3482	,3123	,2831	,2589	,2384	,2209	,2058	,1926	,1810	,1726	,1642	,1559	,1475	,1391	1
2		,9747	,8646	,7514	,6574	,5818	,5207	,4707	,4291	,3942	,3644	,3387	,3163	,2967	,2794	,2640	,2525	,2411	,2296	,2182	2
3			,9830	,9024	,8107	,7287	,6587	,5997	,5496	,5069	,4701	,4381	,4101	,3854	,3634	,3438	,3262	,3129	,2995	,2862	3
4				,9873	,9236	,8468	,7747	,7108	,6551	,6076	,5644	,5273	,4946	,4657	,4398	,4166	,3956	,3767	,3621	,3475	4
5					,9898	,9371	,8713	,8071	,7486	,6965	,6502	,6091	,5726	,5400	,5107	,4844	,4605	,4389	,4191	,4036	5
6						,9915	,9466	,8889	,8312	,7776	,7287	,6848	,6452	,6096	,5774	,5483	,5219	,4978	,4758	,4556	6
7							9926	,9532	,9032	,8500	,7993	,7535	,7117	,6737	,6392	,6078	,5792	,5540	,5289	,5068	7
8								,9935	,9590	,9127	,8637	,8176	,7745	,7348	,6984	,6650	,6458	,6063	,5804	,5566	8
9									,9943	,9632	,9200	,8755	,8329	,7918	,7541	,7195	,6869	,6571	,6297	,6043	9
10										,9949	,9667	,9281	,8873	,8473	,8091	,7733	,7399	,7088	,6799	,6531	10
11											,9935	,9693	,9335	,8953	,8576	,8214	,7872	,7551	,7251	,6971	11
12												,9957	,9719	,9389	,9033	,8679	,8336	,8010	,7702	,7413	12
13													,9960	,9737	,9426	,9090	,8753	,8425	,8113	,7817	13
14														,9963	,9755	,9464	,9146	,8827	,8525	,8215	14
15															,9966	,9773	,9501	,9203	,8901	,8604	15
16																,9968	,9784	,9534	,9239	,8949	16
17																	,9970	,9795	,9548	,9275	17
18																		,9971	,9806	,9571	18
19																			,9972	,9817	19
20																				,9974	20

ПРИЛОЖЕНИЕ 4
Справочное

ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ (и логарифмически нормального Вейбулла)

1. Случайная величина X считается распределенной по трехпараметрическому логарифмически нормальному закону, если ее функция распределения имеет вид

$$F(x;\ \mu,\sigma,c)=\begin{cases}\Phi\left(\dfrac{\lg(x-c)-\mu}{\sigma}\right), & x>c,\\ O, & x\leqslant c,\end{cases}$$

где

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y}e^{-\frac{V^2}{2}}dV.$$

Здесь μ — математическое ожидание и σ — среднее квадратическое отклонение случайной величины $Y=\lg\ (X-c)$, а c — параметр сдвига.

Случайная величина X распределена по трехпараметрическому закону Вейбулла, если ее функция распределения имеет вид

$$F(x;a,b,c)=\begin{cases}1-\exp\left\{-\left(\dfrac{x-c}{a}\right)^b\right\}, & x\geqslant c,\\ O, & x<c,\end{cases}$$

где a — параметр масштаба, b — параметр формы, c — параметр сдвига.

Правила настоящего стандарта изложены в предположении, что параметр масштаба известен и $c=0$. В настоящем приложении описан способ графического оценивания всех трех параметров.

Определение оценки $\bar{c}$ величины сдвига c предшествует нахождению оценок остальных параметров. Сначала на вероятностной сетке для логарифмически нормального распределения (соответственно распределения Вейбулла) строят точки, как указано в п.п. 3.3 и 3.4 настоящего стандарта соответственно. Эти точки соединяют плавной кривой. Затем выбирают наблюдения $x_{(1)}$ и $x_{(2)}$ около противоположных концов выборки. Через $y_{(1)}$ и $y_{(2)}$ обозначают ординаты соответствующих точек на вероятностной сетке. Определяют $y_{(3)}$ как среднее арифметическое чисел $y_{(1)}$ и $y_{(2)}$:

$$y_{(3)}=\frac{y_{(1)}+y_{(2)}}{2}. \qquad (1)$$

На построенной кривой берут точку с ординатой $y_{(3)}$. Ее абсциссу обозначают Z и выбирают $x_{(3)}$ так, чтобы

$$S_x(x_{(3)})=Z. \qquad (2)$$

Затем оценку $\bar{c}$ параметра сдвига c находят по формуле

$$\bar{c}=\frac{x_{(1)}\cdot x_{(2)}-x_{(3)}^2}{x_{(1)}+x_{(2)}-2x_{(3)}}. \qquad (3)$$

2. После нахождения оценки $\bar{c}$ абсциссы точек, соответствующих значениям x, вычисляют по формуле

$$S_x(x)=K_x\cdot\lg(x-\bar{c}), \tag{4}$$

где

$$K_x=\frac{L}{\lg(x_{max}-\bar{c})-\lg(x_{min}-\bar{c})},$$

а L, x_{max}, x_{min} — по п. 3.1.3 настоящего стандарта.

Затем строят прямую, как указано в разд. 1 настоящего стандарта. Оценки параметров μ и σ (соответственно a и b) находят по формулам (26) и (14) настоящего стандарта (соответственно по формулам (31) и (33) настоящего стандарта).

3. При нахождении величины $\bar{c}$ используют только шкалу по оси ординат. Поэтому в случае, когда требуется оценить только параметр c, а соответствующая вероятностная сетка отсутствует, достаточно построить шкалу на оси ординат, а по оси абсцисс можно применять равномерную шкалу.

4. В качестве $x_{(1)}$, $x_{(2)}$ можно брать соответственно x_{min} и x_{max}. Тогда в случае логарифмически нормального распределения при нечетном числе элементов в выборке $n=2k-1$ величина $x_{(3)}$, определяемая по формуле (3), практически совпадает с выборочной медианой, т. е. k-м членом вариационного ряда.

Примечание. Не рекомендуется пользоваться оценкой, определяемой по формуле (3), для логарифмически нормального распределения, если размах выборки $x_{max}-x_{min}$ невелик (не превосходит выборочного среднего). В этом случае лучше пользоваться оценкой.

$$\hat{c}=x_{min}. \tag{5}$$

5. Теоретическое обоснование этого способа можно извлечь из [7]. Если случайная величина X распределена по трехпараметрическому закону Вейбулла и $F(x)$ — ее функция распределения, то величина y, определяемая по формуле (29) настоящего стандарта, представляет собой линейную функцию от $\lg(x-c)$, т. е. при некоторых q и r:

$$y=q\cdot\lg(x-c)+r. \tag{6}$$

То же самое получается для логарифмически нормального распределения, если y определяется по формуле

$$y=\Phi^{-1}(F),$$

где Φ^{-1} — функция, обратная к функции Φ нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

В обоих случаях имеем:

$$O=y_{(1)}+y_{(2)}-2y_{(3)}=q[\lg(x_{(1)}-\bar{c})+\lg(x_{(2)}-\bar{c})-2\lg(x_{(3)}-\bar{c})]=$$

$$=q\lg\frac{(x_{(1)}-\bar{c})(x_{(2)}-\bar{c})}{(x_{(3)}-\bar{c})^2}, \tag{7}$$

т. е.

$$\frac{(x_{(1)}-\bar{c})(x_{(2)}-\bar{c})}{(x_{(3)}-\bar{c})^2}=1, \tag{8}$$

откуда следует формула (3).

6. Пример определения параметров трехпараметрического распределения Вейбулла.

На опыте получена выборка из 24 значений случайной величины X, распределенной по трехпараметрическому закону Вейбулла. Упорядоченное значение x_i случайной величины приведены в табл. 1. Определить оценки параметров графически.

Решение

Находим значения $\hat{F}(x_i)$ по формуле (1) настоящего стандарта и наносим на вероятностную сетку точки в соответствии с указаниями п. 3.4 настоящего стандарта. Выбирая $x_{(1)}=x_{\min}=501$, $x_{(2)}=x_{\max}=2375$, имеем $y_{(1)}=-108,6$; $y_{(2)}=39,7$, и по формуле (1) $y_{(3)}=-34,4$. Точка пересечения горизонтальной прямой $y=y_{(3)}$ с кривой, соединяющей нанесенные точки, имеет абсциссу $Z=93,5$*. При помощи формулы (1) и данных, приведенных в табл. 3 настоящего стандарта, находим $x_{(3)}=860$. Теперь по формуле (3)

$$\bar{c}=\frac{501\cdot 2375-860^2}{501+2375-2\cdot 860}=\frac{189875-739600}{2876-1720}=390.$$

Для нахождения параметров a и b определяем S_x по формуле (4), подставляя в нее $\bar{c}=390$. Результаты вносим в табл. 1 и далее поступаем так, как указано в п. 3.4 настоящего стандарта. Получаем (пример 6 приложения 1):

$$OA=92,5 \text{ мм};$$

$$q=1,4.$$

Применяя формулы (31) и (33) настоящего стандарта, имеем

$$\bar{a}=840,$$

$$\bar{b}=\frac{100\cdot 1,4}{78,16}=1,8.$$

П р и м е ч а н и е. В соответствии с разд. 3.4 настоящего стандарта следует использовать

$$S_x(x)=K_x\cdot \lg x$$

при определении $\bar{c}$ и

$$S_x(x)=K_x\cdot \lg(x-\bar{c})$$

в дальнейшем. Однако при обработке данных в настоящем примере мы воспользовались несколько иным видом $S_x(x)$, а именно:

$$S_x(x)=K_x \lg\frac{x}{d}=K_x\cdot \lg x-K_x\cdot \lg d,$$

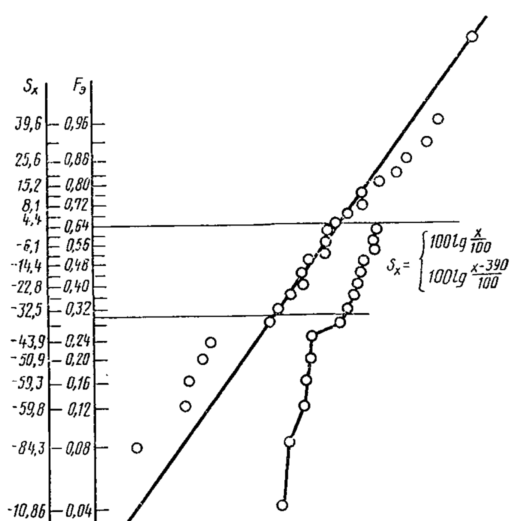
где $d=100$. Формула (31) настоящего стандарта при этом заменяется на следующую:

$$K_x\cdot \lg\frac{\hat{a}}{d}=\pm OA.$$

* На кривой чертежа не показаны точки с положительными ординатами, так как они не нужны при определении оценки сдвига.

Таблица 1

i	x_i	$100 \lg \frac{x_i}{100}$	$x_i - \bar{c}$	$100 \lg \frac{x_i - \bar{c}}{100}$	$\hat{F}(x_i)$	$s_y(\hat{F}(x_i))$
1	501	69,3	111	2,5	0,04	—108,6
2	531	72,4	141	14,9	0,08	—84,3
3	605	78,1	215	33,2	0,12	—69,8
4	610	78,5	220	34,2	0,16	—59,3
5	641	80,6	251	40,1	0,20	—50,9
6	656	81,7	266	42,5	0,24	—43,9
7	837	92,2	447	65,0	0,28	—37,8
8	865	93,6	475	67,7	0,32	—32,3
9	940	97,3	550	74,0	0,36	—27,4
10	976	98,9	586	76,7	0,40	—22,8
11	988	99,5	598	77,6	0,44	—18,6
12	1016	100,8	626	79,6	0,48	—14,4
13	1115	104,6	725	86,0	0,52	—11,5
14	1122	104,9	732	86,4	0,56	—6,7
15	1141	105,7	751	87,6	0,60	—2,9
16	1179	107,2	789	89,7	0,64	+0,7
17	1283	110,9	893	95,0	0,68	+4,4
18	1380	114,0	990	99,6	0,72	+8,1
19	1401	114,6	1011	100,4	0,76	+12,1
20	1561	119,3	1171	107,1	0,80	+16,2
21	1760	124,5	1370	113,9	0,84	+19,6
22	1918	128,3	1528	118,3	0,88	+25,6
23	2182	133,8	1792	125,3	0,92	+32,0
24	2375	137,5	1985	129,5	0,96	+39,7



Приложения 1, 2, 3 и 4 (**Измененная редакция, Изм. № 1**).

ПРИЛОЖЕНИЕ 5
Справочное

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТАНДАРТА

1. Наряду с аналитическими методами на практике часто применяют графические методы определения оценок параметров распределений. Они дают менее точные результаты, чем аналитические, но обладают следующими преимуществами:

простотой вычислений;

большей наглядностью;

возможностью одновременно проверять согласие эмпирического распределения с теоретическим и определять оценки параметров распределения.

2. График функции $F(x)$ распределения случайной величины X в общем случае представляет собой кривую линию (если на одной оси откладывать значения x случайной величины X, на другой — соответствующие значения функции распределения $F(x)$).

Преобразованием величины x или величины F, или обеих величин удается сделать график функции распределения прямолинейным.

Вероятностная сетка для данного вида распределения представляет собой прямоугольную сетку, на которой по одной или двум осям нанесены шкалы, соответствующие указанным выше преобразованиям.

3. Если построить на вероятностной сетке доверительные границы для данного распределения (приложение 3), то легко видеть, что они не представляют собой прямые, параллельные графику распределения, а отклоняются от него по мере приближения к концам выборки. Это отражено в п. 1.4 настоящего стандарта. Если при графической проверке согласия эмпирического и теоретического распределения возникают сомнения в том правильно ли выбран вид теоретического распределения, то следует применять аналитические методы проверки в соответствии с ГОСТ 11.006—74.

4. Значения $\widehat{F}(x_i)$ эмпирической функции распределения определяют (при $n \leqslant 30$) по формуле (1) настоящего стандарта — см. [3], [4].

Часто применяемая в теоретических исследованиях формула

$$\widehat{F}(x_i) = \frac{i}{n} \qquad (1)$$

неудобна для настоящего стандарта, так как из нее следует, что

$$\widehat{F}(x_{\max}) = 1,$$

и тем самым точке $x_{\max}$ не отвечает никакое значение $S_y(F)$. Формула (1) настоящего стандарта этим недостатком не обладает. В ряде случаев в качестве оценки функции распределения в точке x_i целесообразно использовать не $\frac{i}{(n+1)}$ согласно формуле (1) настоящего стандарта, а некоторые величины p_i, зависящие от i и n. В частности, при применении вероятностной сетки для статистического приемочного контроля качества продукции по количественному признаку (приложение 6) используется $p_i \neq \frac{i}{n+1}$.

Табл. 1 приложения 6 взята из [5]; значения p_i в ней выбраны так, чтобы получаемые с помощью нормальной вероятностной сетки оценки параметров имели наименьшую дисперсию среди несмещенных оценок [6] (предполагается, что прямая проводится по методу наименьших квадратов).

5. Случайная величина X называется распределенной по нормальному закону с параметрами m и σ, если ее функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(v-m)^2}{2\sigma^2}}\,dv. \qquad (2)$$

Нормальное распределение с параметрами 0 и 1 называется нормированным и центрированным; его функция распределения обозначается Φ.

Через $u\,(z)$ обозначается квантиль нормированного и центрированного нормального распределения, отвечающая значению z функции Φ:

$$z=\Phi(x),\ x=u(z),\ u(\Phi(x))=x. \qquad (3)$$

Так как

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \qquad (4)$$

то, учитывая равенство (3), имеем

$$u(F(x))=\frac{x-m}{\sigma}, \qquad (5)$$

т. е. величина u линейно зависит от x.

Из формулы (5) следует способ построения вероятностной сетки для нормального распределения и способ определения оценок параметров m и σ (п. 3.1 настоящего стандарта).

6. Случайная величина X называется распределенной по экспоненциальному закону с параметром масштаба λ и параметром сдвига c, если ее функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda(x-c)} & \text{при } x\geqslant c,\\ 0 & \text{при } x<c.\end{cases} \qquad (6)$$

Из равенства (6) следует, что при $x\geqslant c$

$$-\ln(1-F)=\lambda(x-c), \qquad (7)$$

т. е. величина $\ln\,(1-F)$ линейно зависит от x.

Из формулы (7) следует способ построения вероятностной сетки для экспоненциального распределения и способ определения параметров λ и c (п. 3.2 настоящего стандарта).

7. Случайная величина X называется распределенной по логарифмически нормальному закону с параметрами μ, σ и c, если ее функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\lg(x-c)} e^{-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,d\,v & \text{при } x\geqslant c,\\ 0 & \text{при } x<c\end{cases} \qquad (8)$$

(параметр c называется параметром сдвига).

Другими словами, $\lg\,(X-c)$ имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ. Поэтому вероятностную сетку для логарифмически нормального распределения строят так же, как и для нормального распределения, только по оси x пользуются не равномерной, а логарифмической шкалой (п. 3.3 настоящего стандарта).

Подставляя в формулу (5) $\lg\,(x-c)$ и μ вместо x и m, получаем, что в случае логарифмически нормального распределения

$$u(F(x))=\frac{\lg(x-c)-\mu}{\sigma}. \qquad (9)$$

Если известно, что $c=0$, то из формулы (9) непосредственно следует способ определения оценок параметров μ и σ (см. п. 3.3 настоящего стандарта). В противном случае находят оценку параметра c (справочное приложение 4), а затем, используя формулу (9), определяют оценки параметров μ и σ.

8. Случайная величина X называется распределенной по закону Вейбулла с параметрами a, b и c, если ее функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\left(\frac{x-c}{a}\right)^b} & \text{при } x\geqslant c, \\ 0 & \text{при } x<c, \end{cases} \qquad (10)$$

где $a>0$, $b>0$.

Параметр c называется параметром сдвига. Если известно, что $c=0$, то распределение Вейбулла является двухпараметрическим.

Из формулы (10) следует, что при $x>c$ имеем

$$-\ln(1-F)=\left(\frac{x-c}{a}\right)^b. \qquad (11)$$

Логарифмируя, получим

$$\ln[-\ln(1-F)]=b\ln\left(\frac{x-c}{a}\right)=2{,}303b[\lg(x-c)-\lg a], \qquad (12)$$

т. е. величина $y=\ln[-\ln(1-F)]$ линейно зависит от $\lg(x-c)$. Поэтому из формулы (12) следует способ построения вероятностной сетки для распределения Вейбулла. Для двухпараметрического распределения Вейбулла из формулы (12) также непосредственно следует способ определения оценок параметров a и b (п. 3.4 настоящего стандарта). Для трехпараметрического распределения Вейбулла сначала находят оценку параметра c (справочное приложение 4), а затем с помощью формулы (12) определяют оценки параметров a и b.

9. Выборка объемом n называется полностью определенной, если в ней известны все значения случайной величины x.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Справочное

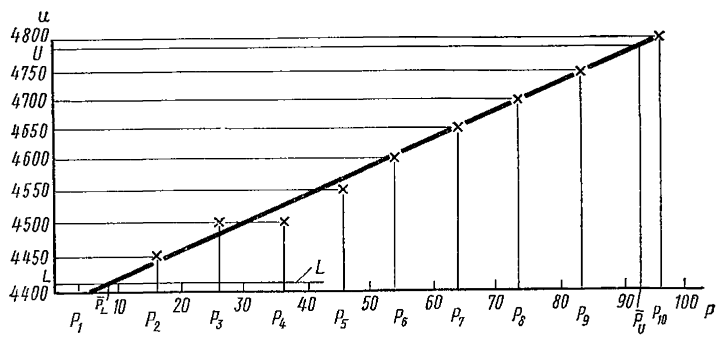
ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОЙ СЕТКИ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО ПРИЕМОЧНОГО КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ ПО КОЛИЧЕСТВЕННОМУ ПРИЗНАКУ

1. Вероятностную сетку можно применять для статистического приемочного контроля качества продукции по количественному признаку. При этом значительно сокращаются вычисления, свойственные этому виду контроля.

Применение вероятностной сетки излагается для случая нормального распределения. Аналогичным образом другие виды сеток можно применять для контроля при соответствующем распределении контролируемого параметра.

2. Для статистического приемочного контроля удобно располагать вероятностную сетку так, чтобы по горизонтальной оси откладывать вероятности p_i ($i=1, \ldots, n$) (в процентах), а по вертикальной оси — результаты наблюдений u_i.

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — расположенные в возрастающем порядке результаты наблюдений контролируемого параметра и на вероятностную сетку наносятся точки $(p_1, u_1), \ldots, (p_n, u_n)$ (см. чертеж). При этом для $n \leqslant 20$ вероятности p_i определяются по табл. 1, а для $n > 20$—по формуле $p_i = \frac{2i-1}{2n}$ (или по формуле (1) настоящего стандарта).



При постоянном объеме выборки для ряда партий изделий значения p_i целесообразно заранее нанести на вероятностную сетку.

3. На той же сетке прочерчивается одна или две горизонтальные линии, соответствующие нижнему L и верхнему U значениям контролируемого параметра.

4. По точкам $(p_1, u_1), \ldots, (p_n, u_n)$ строят прямую, как указано в разд. 1 настоящего стандарта. Если опытные точки расположены так, что через них невозможно провести прямую, от которой они незначительно отклоняются, то это означает, что результаты контроля не принадлежат нормальной совокупности и к ним неприменимы правила контроля, установленные для нормального распределения контролируемого параметра. Таким образом, в данном случае нельзя применять нормальную вероятностную сетку.

Проведенная прямая пересечет линии L и U соответственно в точках $\bar{p}_L$ и $\bar{p}_y$. Если для одностороннего критерия приемки $\bar{p}_L \leqslant p^*$ или $1 - \bar{p}_n \leqslant p^*$, где p^* — контрольный норматив входного уровня дефектности, то партию продукции принимают, в противном случае бракуют. Контрольный норматив p^* находят в табл. 2 по объему выборки и значению приемочного уровня дефектности.

Для двухстороннего критерия, если двум заданным границам контролируемого параметра соответствует одинаковый приемочный уровень дефектности, правило приемки формулируется так: партию продукции принимают, если

$$1 - \bar{p}_y + \bar{p}_L \leqslant p^*,$$

в противном случае бракуют. Контрольный норматив p^* находят в табл. 2 по объему выборки и приемочному уровню дефектности.

Для двухстороннего критерия в случае, если двум заданным границам контролируемого параметра соответствуют различные приемочные уровни дефектности, правило приемки строится следующим образом. По объему выборки и значениям приемочного уровня дефектности в табл. 2 находят контрольные нормативы входного уровня дефектности p_L^* и p_y^* соответственно для нижней и верхней заданных границ контролируемого параметра по отдельности. Тогда если $1-\overline{p}_u \leqslant p^*_y$ и $\overline{p}_L \leqslant p^*_L$, а $1-\overline{p}_y+\overline{p}_L$ меньше или равно большему из p^*_y и p^*_L, то партию продукции принимают. В противном случае партию продукции бракуют.

Примечание. В особых случаях при забраковании партии поставщик по согласованию с потребителем может принять специальное решение, например, перевести контролируемую продукцию в более низкую категорию качества или реализовать ее по пониженной цене и т. п.

5. Значения p^* в зависимости от условий приемки приведены в ГОСТ 20736—75.

6. Для наглядности приведем пример контроля предела упругости плавки стали.

Пример. Для определенной марки стали предел упругости должен быть не менее 4410 кг/см^2 и требуется решить вопрос о соответствии этому требованию плавки при приемочном уровне дефектности 4% и объеме выборки $n=10$.

Испытания десяти образцов по определению упругости в кг/см^2 дали следующие результаты: 4500; 4650; 4750; 4400; 4500; 4450; 4800; 4700; 4600; 4550.

Решение. Приведенные значения располагают в возрастающем порядке и наносят на вероятностную сетку, как показано на черт. 1, так, что

$$u_1=4400;\ u_2=4450;\ldots;\ u_{10}=4800.$$

Соответствующие абсциссы этих точек находят с помощью табл. 1, где для $n=10$ они равны: $p_1=4,4\%$, $p_2=16,4\%$, . . . , $p_{10}=95,6\%$.

Через эти точки проводят прямую, которая пересекается с горизонтальной линией $L=4410$ кг/см^2 в точке с абсциссой $\overline{p}_L \approx 6\%$. Из табл. 2 следует, что для приемочного уровня дефектности 4% и объема выборки, равного 10, значение $p^*=10,23\%$.

Поскольку в данном случае $p_L \leqslant p^*$, плавку признают соответствующей требованиям нормативно-технической документации; в противном случае поставщик должен был бы выявить причины неудовлетворительной механической прочности и принять меры к их устранению, а относительно реализации плавки по согласованию с потребителем принять специальное решение.

Таблица 1

Значения p_i (в %), которые наносятся на нормальную вероятностную сетку при проведении статистического приемочного контроля по количественному признаку

n	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
2	18,8									
3	14,0	50,0								
4	11,0	38,3								
5	8,9	31,3	50,0							
6	7,5	26,5	42,2							
7	6,4	23,0	36,6	50,0						
8	5,5	20,2	32,3	44,1						
9	4,9	18,9	29,0	39,5	50,0					
10	4,4	16,4	26,2	35,8	45,3					
11	4,0	15,0	24,0	32,7	41,4	50,0				
12	3,6	13,8	22,1	30,1	38,1	46,0				
13	3,3	12,7	20,4	27,9	35,4	42,7	50,0			
14	3,1	11,9	19,0	26,0	32,9	39,8	46,6			
15	2,8	11,1	17,8	24,4	30,8	37,2	43,6	50,0		
16	2,6	10,4	16,7	22,4	29,0	35,0	41,0	47,0		
17	2,5	9,8	15,8	21,6	27,3	33,0	38,7	44,4	50,0	
18	2,3	9,2	14,9	20,4	25,9	31,2	36,6	42,0	47,0	
19	2,2	8,8	14,1	19,4	24,6	29,7	34,8	39,9	44,9	50,0
20	2,1	8,3	13,4	18,4	23,4	28,3	33,1	38,0	42,8	47,6

Примечания. 1. Все значения p_i даны в процентах.

2. При $i > \frac{n}{2}$ значения p_i рассчитывают по формуле $p_i = 100 - p_{n-i+1}$

Таблица 2

Значения контрольного норматива p^*

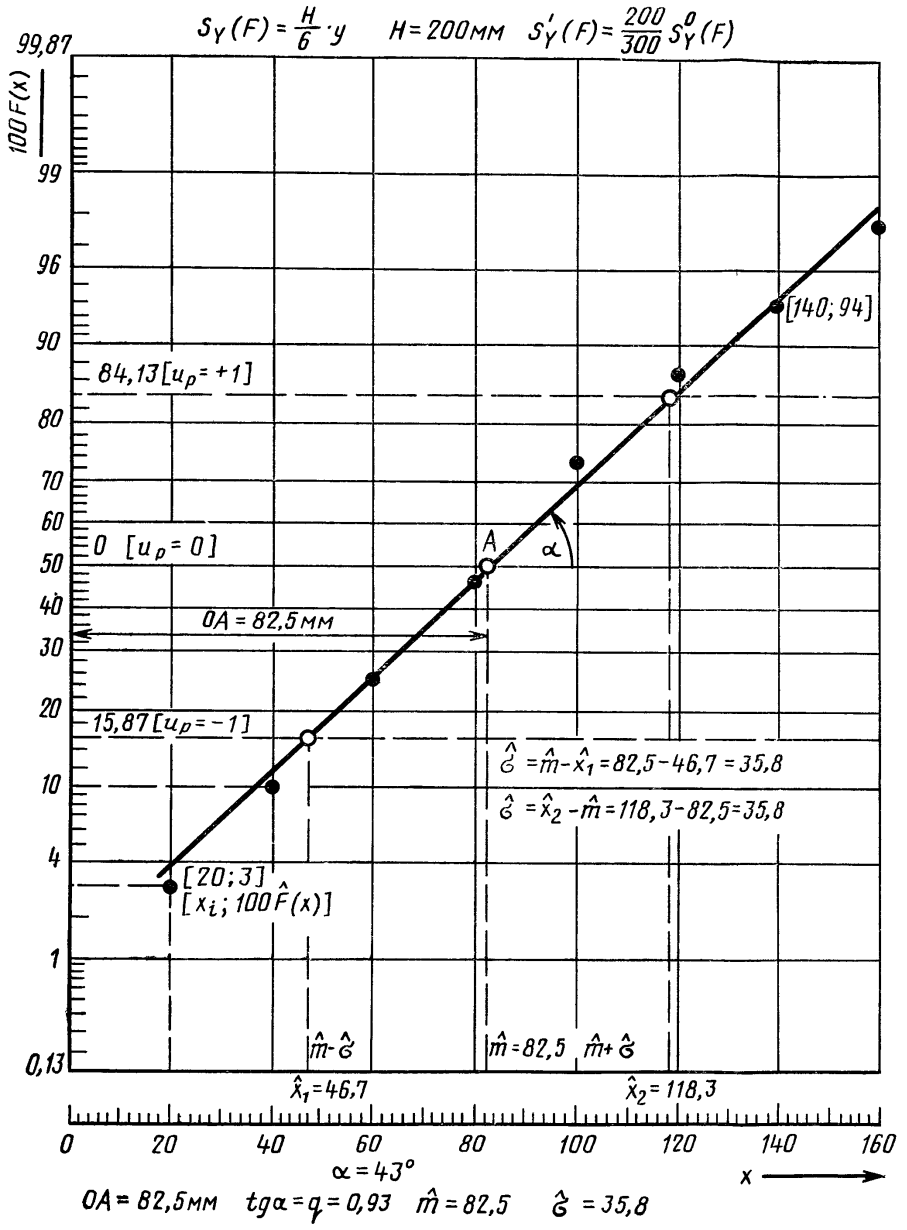
Объем выборки	Приемочный уровень дефектности													
	0,04	0,065	0,10	0,15	0,25	0,40	0,65	1,00	1,50	2,50	4,00	6,50	10,00	15,00
	Контрольный норматив p^*													
3	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	7,59	8,86	26,94	33,69	40,47
4	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	1,53	5,50	10,92	6,45	22,66	29,45	36,90
5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	1,33	3,32	5,83	9,80	4,39	20,19	26,56	33,99
7	↓	↓	↓	↓	0,422	1,06	2,14	3,55	5,35	9,40	2,20	17,35	23,29	30,50
10	↓	↓	↓	0,349	0,716	1,30	2,17	3,26	4,77	7,29	3,54	15,17	20,74	27,57
15	0,099	0,186	0,312	0,503	0,818	1,31	2,11	3,05	4,31	6,56	9,46	13,71	18,94	25,61
20	0,135	0,228	0,365	0,544	0,846	1,29	2,05	2,95	4,09	6,17	8,92	12,99	18,03	24,53
25	0,155	0,250	0,380	0,551	0,887	1,29	2,00	2,86	3,97	5,97	8,63	12,57	17,51	23,97
30	0,179	0,280	0,413	0,581	0,879	1,29	1,98	2,83	3,91	5,86	8,47	12,36	17,24	23,58
35	0,170	0,264	0,388	0,535	0,847	1,23	1,87	2,68	3,70	5,57	8,10	11,87	16,65	22,91
40	0,179	0,275	0,401	0,566	0,873	1,26	1,88	2,71	3,72	5,58	8,09	11,85	16,61	22,86
50	0,163	0,250	0,368	0,503	0,789	1,17	1,71	2,49	3,45	5,20	7,61	11,23	15,87	22,0
75	0,147	0,228	0,330	0,467	0,720	1,07	1,60	2,29	3,20	4,87	7,15	10,63	15,13	21,11
100	0,145	0,220	0,317	0,447	0,689	1,02	1,53	2,20	3,07	4,69	6,91	10,32	14,75	20,66
150	0,134	0,203	0,293	0,413	0,638	0,949	1,43	2,05	2,89	4,43	6,57	9,88	14,20	20,02
200	0,135	0,204	0,294	0,414	0,637	0,945	1,42	2,04	2,87	4,40	6,53	9,81	14,12	19,92

Примечания 1. Все значения приемочного уровня дефектности и величины p^* даны в процентах.

2. ↓ — выбирается первое значение под стрелкой.

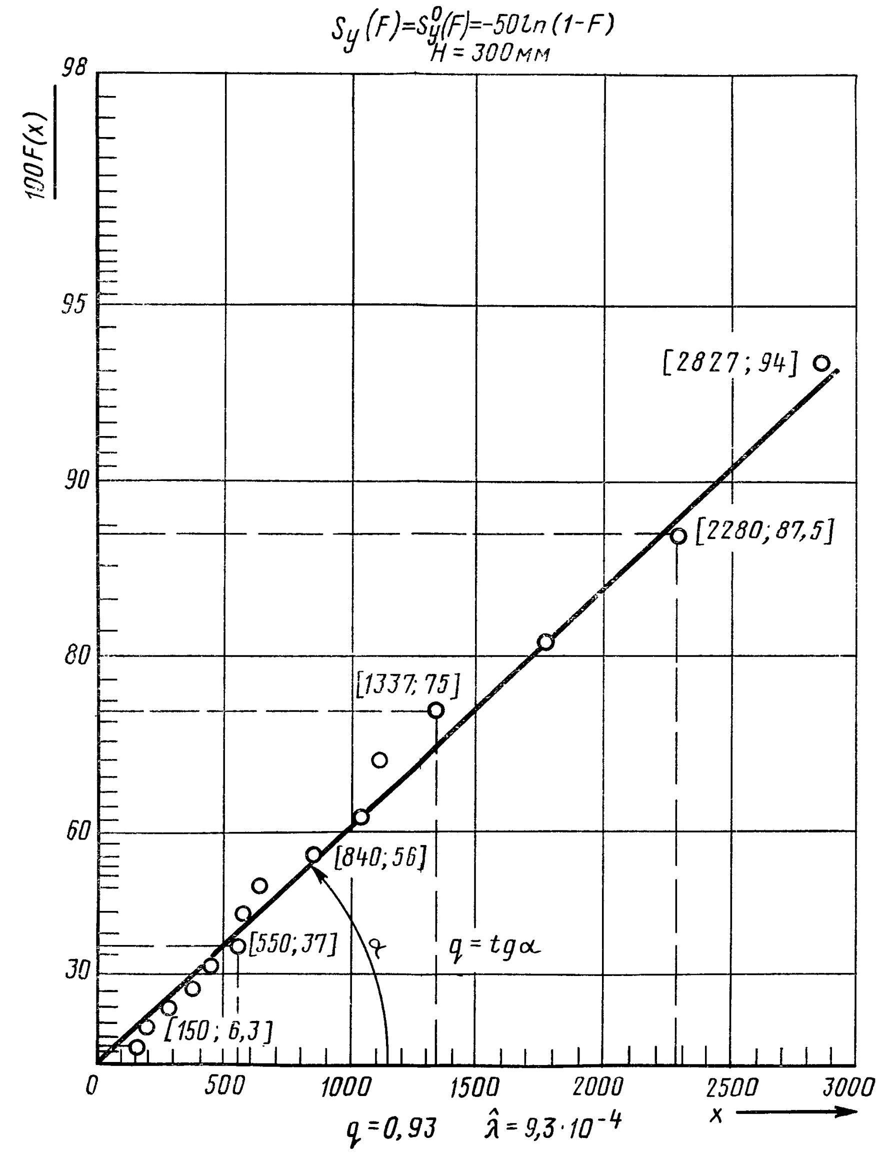
Приложения 5, 6 **(Введены дополнительно, Изм. № 1)**

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОЙ СЕТКИ
ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ



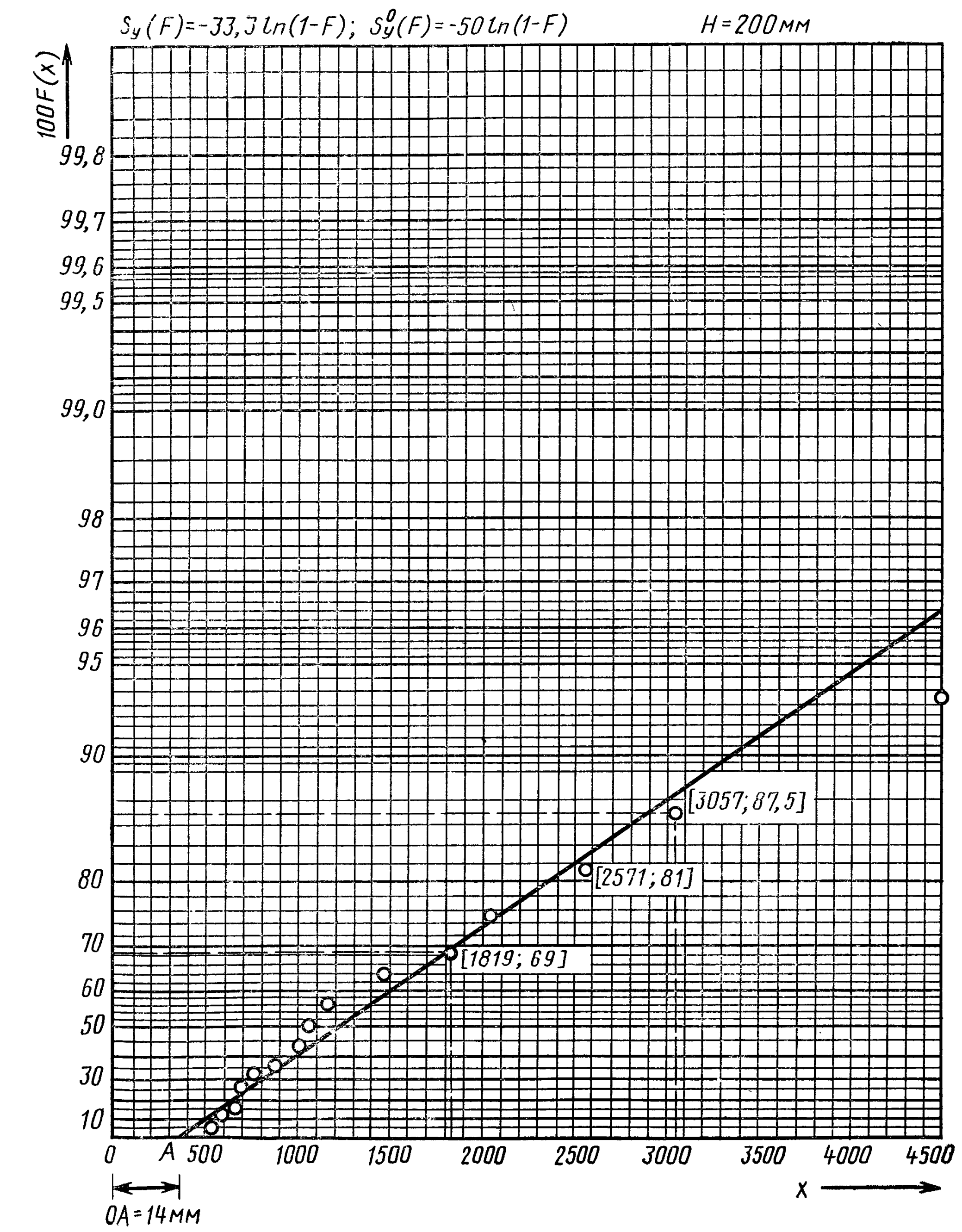
Черт. 1

Применение вероятностной сетки для экспоненциального распределения без сдвига



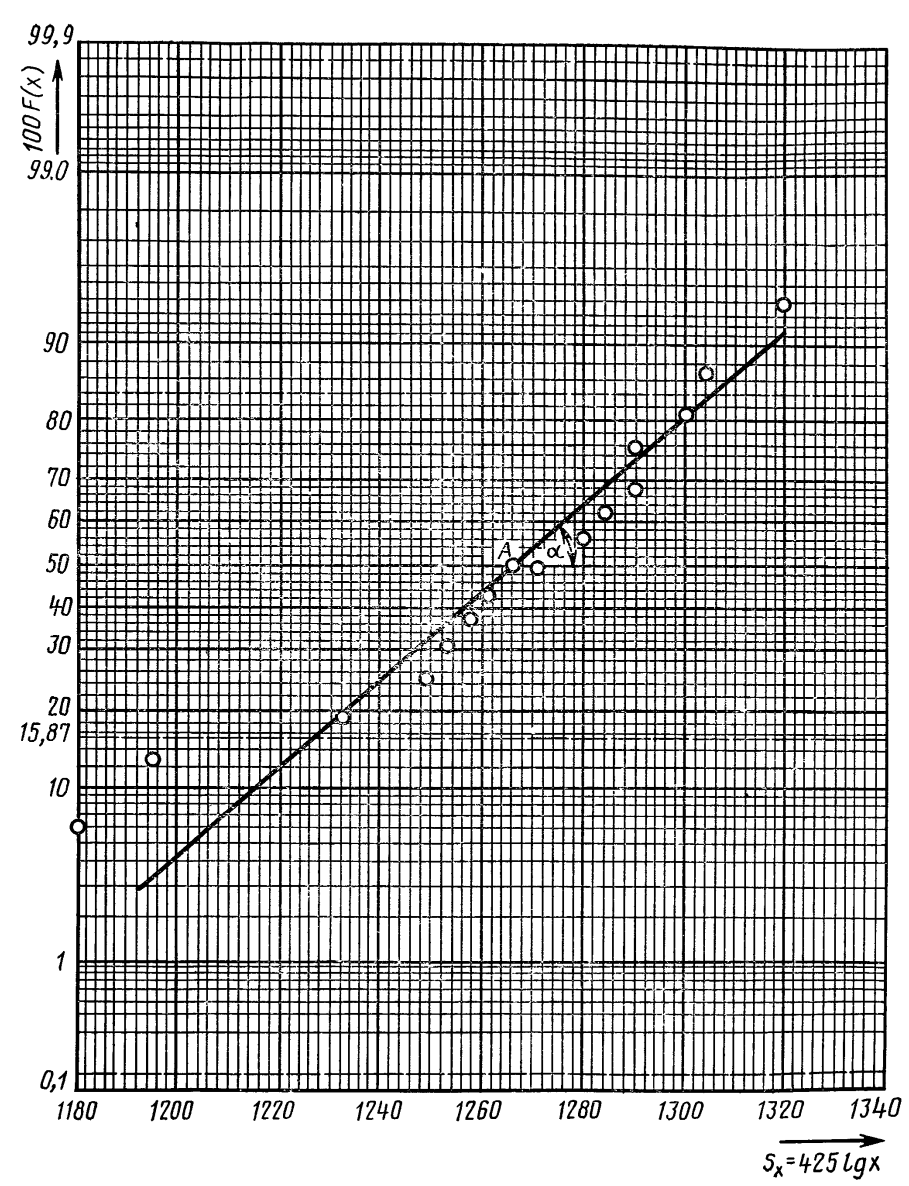
Черт. 2

Применение вероятностной сетки для экспоненциального распределения со сдвигом

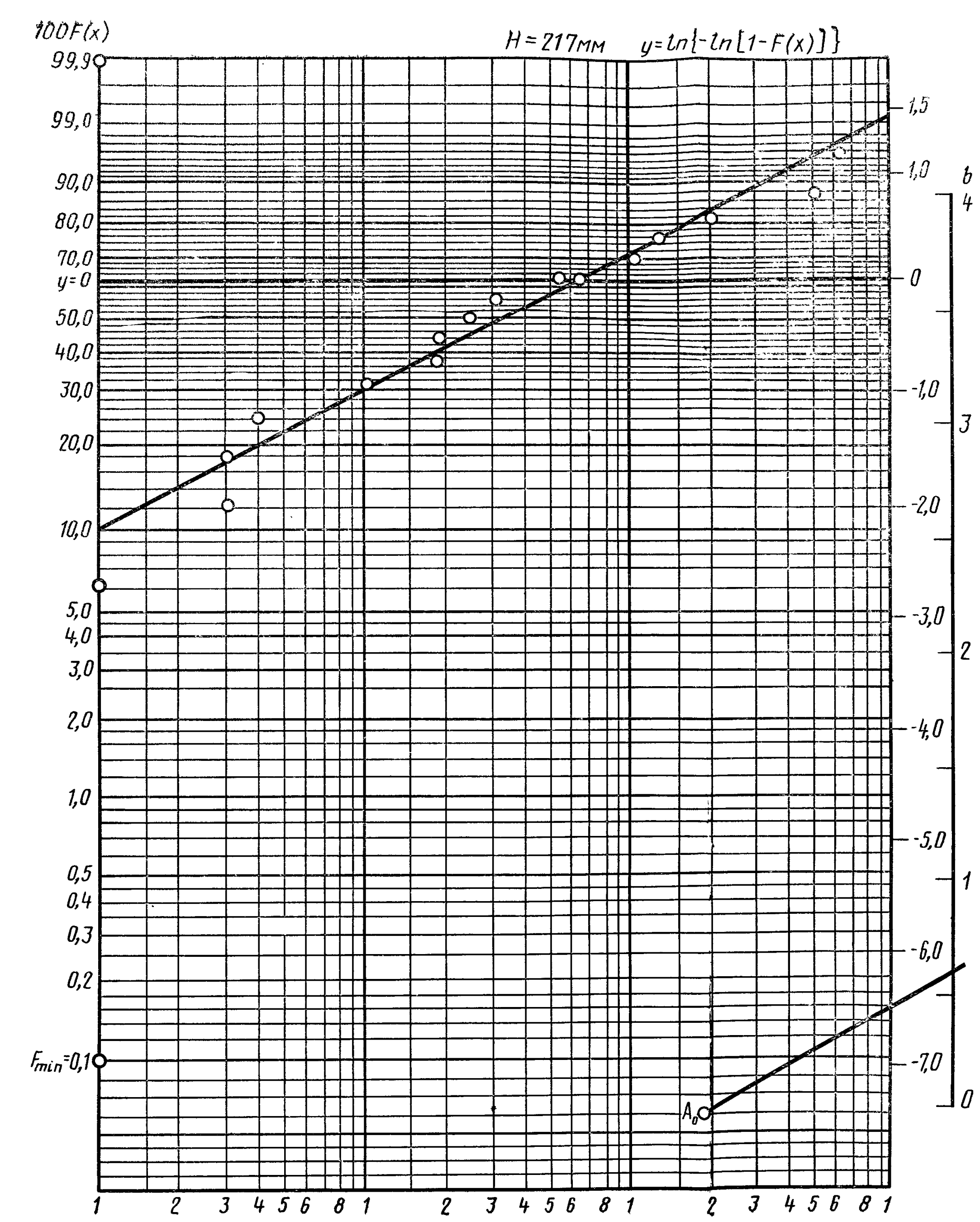


Черт. 3

Применение вероятностной сетки для логарифмически нормального закона

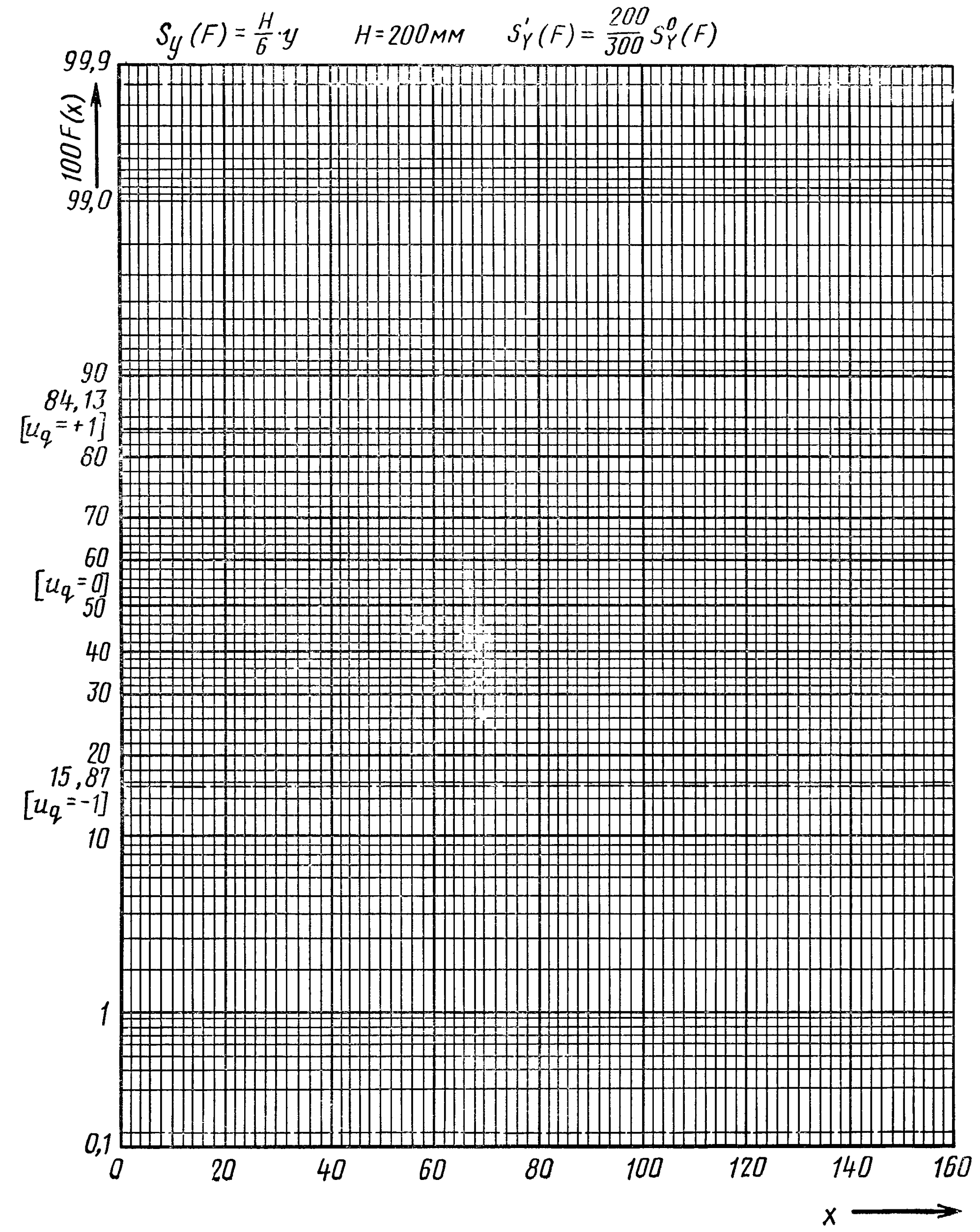


Черт. 4



Черт. 5

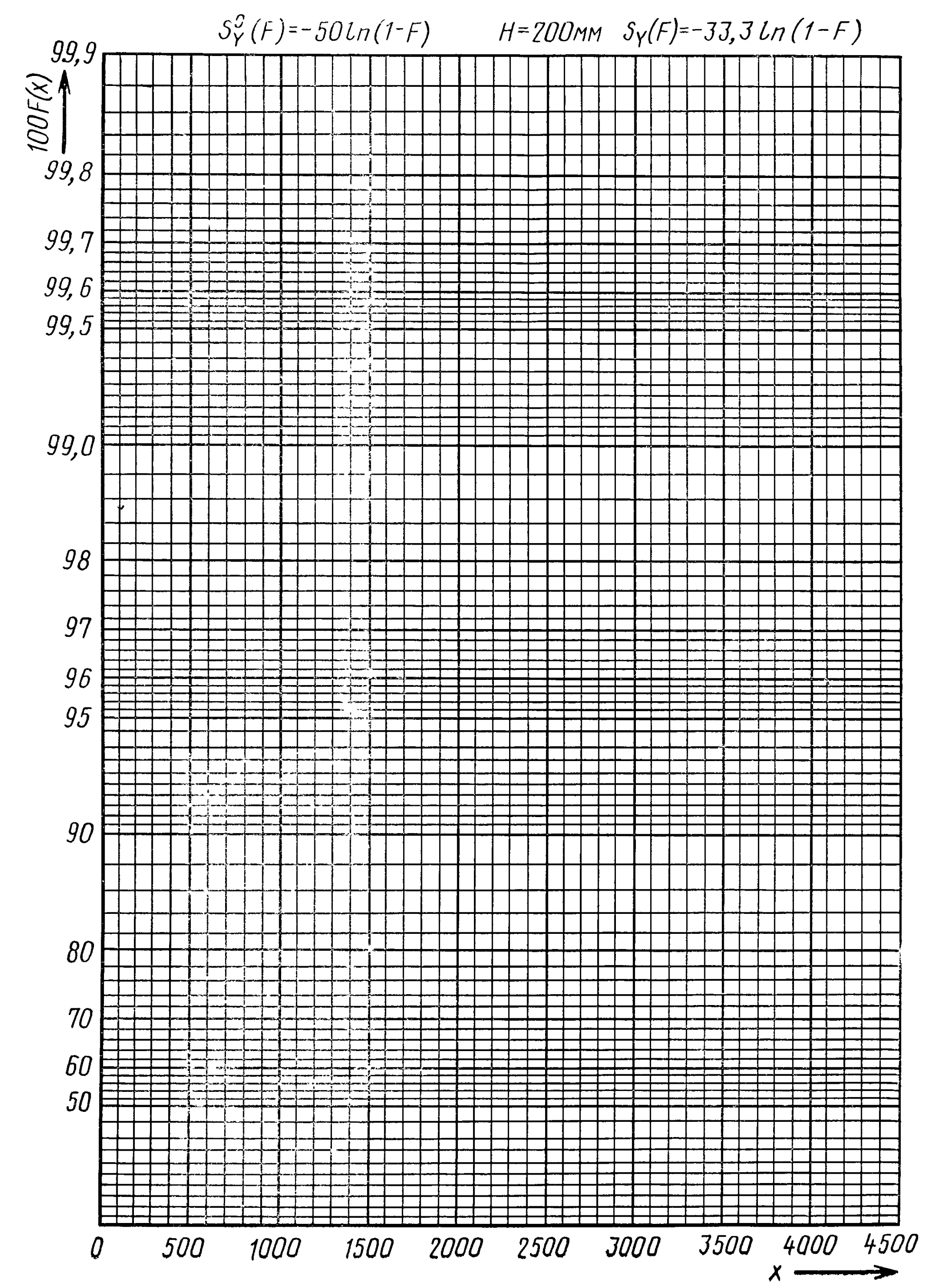
Примеры вероятностных сеток. Вероятностная сетка для нормального распределения



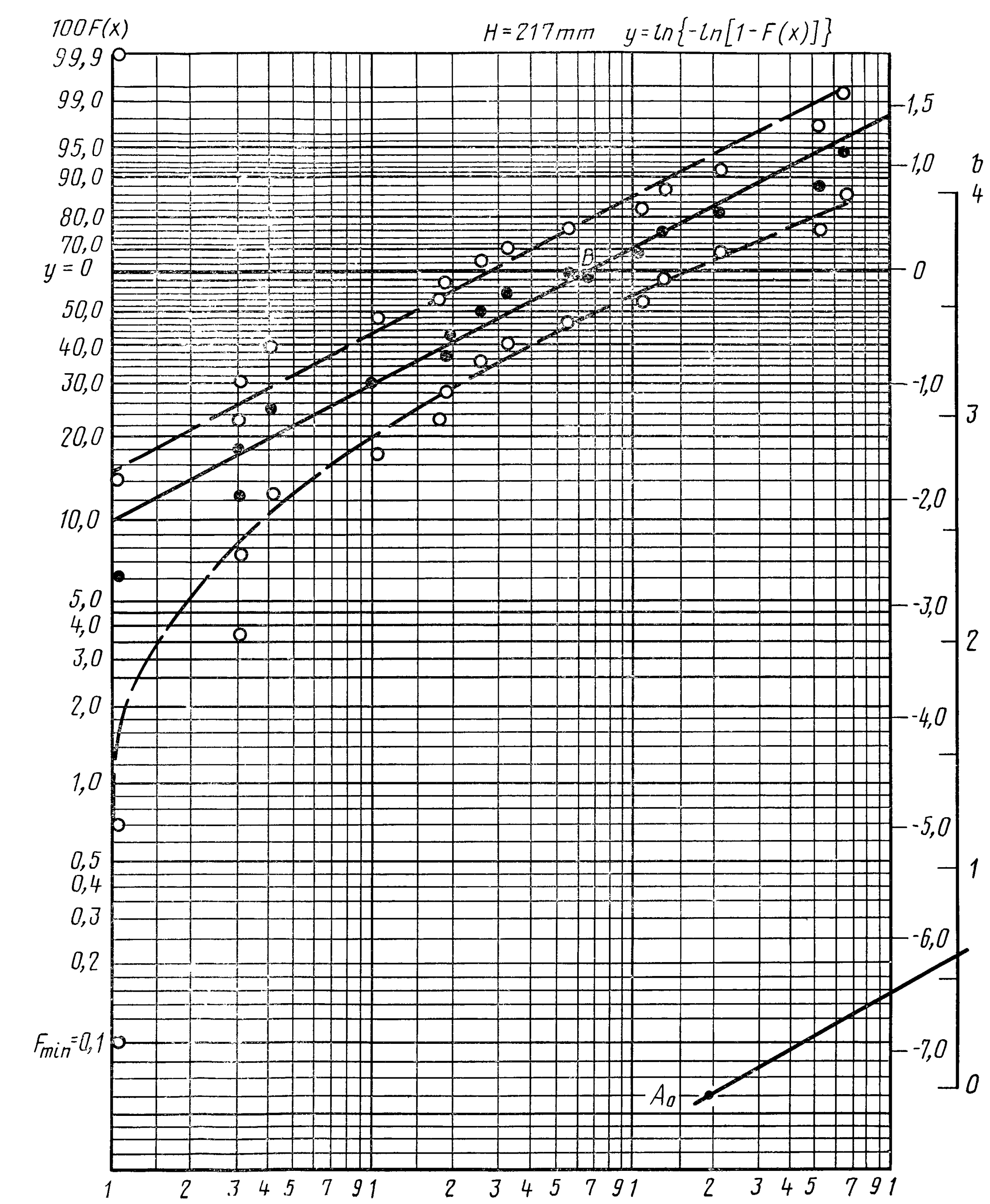
Черт. 1

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
Справочное

Вероятностная сетка для экспоненциального распределения

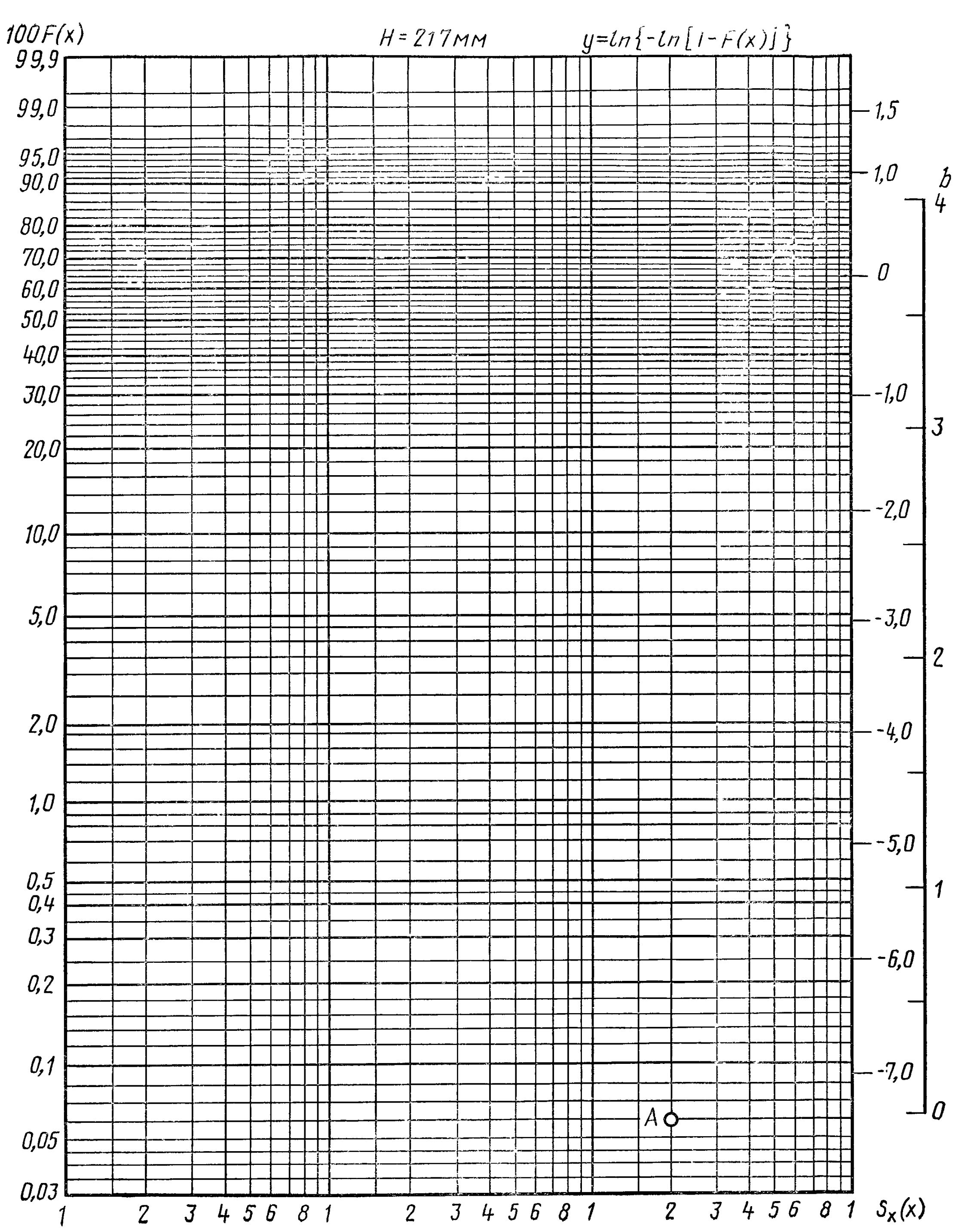


Черт. 2



Черт. 1 (к приложению 3)

Вероятностная сетка для распределения Вейбулла



Черт. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шор Я. Б., Кузьмин Ф. И.** Таблицы для анализа и контроля надежности. М., «Сов. радио», 1968.
2. **Кендалл М., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи. М., «Наука», 1973.
3. **Хальд А.** Математическая статистика с техническими приложениями. М., ИЛ, 1956.
4. Справочник по надежности. М., «Мир», 1969.
5. **Chernoff H., Lieberman G. I.**, Use of Normal Probability Paper, Journal of American Statistical Association, v. 49 (1954), p. 778—784.
6. **Chernoff H., Lieberman G. I.**, Sampling Inspections by Variables with no Calculations, Industrial Quality Control, January, 1957.
7. **Dubey S. D.** On Some Permissible Estimators of the Location Parameter of the Weibull and Certain Other Distributions, Technometrics, 9, p. 293—307 (1967).

Редактор *Л. Д. Курочкина*
Технический редактор *В. И. Тушева*
Корректор *В. И. Кануркина*

Сдано в наб. 17.04.84 Подп. в печ. 28.01.85 2,5 усл. п. л. +вкл. 1,0 усл. п. л. 3,63 усл. кр.-отт. 2,77 уч.-изд. л. +вкл. 1,30 уч.-изд. л. Тир. 12 000 Цена 20 коп.

Ордена «Знак Почета» Издательство стандартов, 123840, Москва, ГСП, Новопресненский пер., 3
Тип. «Московский печатник», Москва, Лялин пер., 6. Зак. 654